



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica *e la sua didattica*



Anno 31, n. 1-2, 2023

Rivista di ricerca in
didattica della matematica

Numero Speciale:

**Fattori affettivi in educazione matematica,
esperienze di formazione e prospettive di ricerca**

Guest Editor:
Cristina Coppola

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1-2 - Ottobre 2023



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica *e la sua didattica*

Anno 31, n. 1-2, 2023

Rivista di ricerca in
didattica della matematica

Numero Speciale:

**Fattori affettivi in educazione matematica,
esperienze di formazione e prospettive di ricerca**

Guest Editor:
Cristina Coppola

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1-2 - Ottobre 2023

In copertina:

Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).

Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

Rivista di ricerca in didattica della matematica,
fondata nel 1987 da Bruno D'Amore,
direttore scientifico dal 1987 al 2021.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

<https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica>

<http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php>

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Direttori:

Miglena Asenova, Maura Iori, Andrea Maffia, George Santi

Redazione:

Maura Iori

Proprietà Direzione Amministrazione Redazione:

NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993

ISSN 1120-9968

Scientificità riconosciuta ANVUR

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:

<https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica>

<http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php>

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia.

Comitato di redazione

Direttore: Maura Iori (Italia)

Miglena Asenova (Italia)

Agnese Del Zozzo (Italia)

Benedetto Di Paola (Italia)

Comitato scientifico:

Samuele Antonini (Università di Firenze, Italia)

Luis Carlos Arboleda (Universidad del Valle, Cali, Colombia)

Luis Moreno Armella (Cinvestav, Ciudad de México, México)

Ferdinando Arzarello (Università di Torino, Italia)

Giorgio Bolondi (Università di Bolzano, Italia)

Guy Brousseau (Université de Bordeaux, Francia)

Bruno D'Amore (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia)

Raymond Duval (Professeur Honoraire de l'Université du Littoral Côte d'Opale, Francia)

Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna, Italia)

Vicenç Font (Universitat de Barcellona, Spagna)

Athanasios Gagatsis (University of Cyprus, Nicosia, Cipro)

Juan D. Godino (Universidad de Granada, Spagna)

Colette Laborde (Université de Grenoble, Francia)

Salvador Llinares (Universidad de Alicante, Spagna)

Maria Alessandra Mariotti (Università di Siena, Italia)

Luis Radford (Université Laurentienne, Canada)

Luis Rico (Universidad de Granada, Spagna)

Bernard Sarrazy (Université de Bordeaux, Francia)

Silvia Sbaragli (Dipartimento Formazione e Apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera)

Fernando Zalamea (Universidad Nacional, Bogotá, Colombia)

Indice

Editoriale

Cristina Coppola

pp. 7–8

Digital interactive storytelling in matematica: narrazione digitale come *affective pathway*

Digital interactive storytelling in mathematics: digital storytelling as an *affective pathway*

Digital interactive storytelling en matemática: narración digital como *affective pathway*

Anna Pierri

pp. 9–23

Tra passato e futuro: storie di futuri insegnanti di matematica di scuola primaria

Between past and future: stories of pre-service mathematics primary teachers

Entre pasado y futuro: historias de futuros profesores de escuela primaria

Annalisa Cusi e Francesca Morselli

pp. 25–39

Apprendere la matematica durante la pandemia: effetti su emozioni e autoefficacia di studenti universitari

Learning mathematics during the pandemic: effects on university students' emotions and sense of self-efficacy

Aprender matemática durante la pandemia: efectos sobre las emociones y la autoeficacia de los estudiantes universitarios

Chiara Andrà, Andrea Amico e Matteo Pezzutto

pp. 41–56

Teachers' emotions during a professional development program based on lesson study
Learning mathematics during the pandemic: effects on university students' emotions and sense of self-efficacy

Le emozioni degli insegnanti durante un programma di formazione professionale basato sullo lesson study

Emociones del profesorado durante un programa de desarrollo profesional basado en el estudio de clase (lesson study)

Laura Muñiz-Rodríguez and Luis J. Rodríguez-Muñiz

pp. 57–76

RECENSIONI

Odifreddi, P. (2022). *Pillole matematiche. I numeri tra umanesimo e scienza*. Raffaello Cortina editore.

Recensione di Bruno D'Amore

pp. 79–81

Contucci, P. (2023). *Rivoluzione Intelligenza Artificiale. Sfide, rischi e opportunità*. Dedalo.

Recensione di Bruno D'Amore pp. 81–84

Peres, E. (2022). *Elogio dello zero*. Fefé.

Recensione di Bruno D'Amore pp. 84–85

Castellini, A., Giberti, C., Lemmo, A. e Maffia, A. (2023). *AttivAzione. Laboratorio di matematica per la scuola del primo ciclo*. libreriauniversitaria.it.

Recensione di Bruno D'Amore pp. 86–87

Kovalevskaja, S. (2022). *Memorie d'infanzia*. Pendragon.

Recensione di Bruno D'Amore pp. 87–89

Editoriale

Cristina Coppola

È ormai dagli anni '90 che la comunità internazionale di ricerca in educazione matematica ha sottolineato il ruolo dei fattori affettivi e la necessità, per usare le parole di Alan Schoenfeld, di “andare oltre il puramente cognitivo” nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica. Nei decenni trascorsi dai primi lavori focalizzati sugli aspetti affettivi, la ricerca in educazione matematica ha sviluppato e presentato una varietà di approcci teorici e metodologici incentrati su diversi concetti e costrutti.

Per l'importanza ormai riconosciuta a questo vasto ambito di ricerca, che è internazionalmente denominato “Affect”, e per i numerosi spunti che le ricerche in questo ambito hanno dato e possono dare alla pratica didattica, è stato ritenuto significativo proporre un numero speciale della rivista *La matematica e la sua didattica* con focus su questo ambito.

Nei contesti educativi, la ricerca ci mostra come sia importante considerare gli aspetti affettivi sia dalla prospettiva degli studenti sia dalla prospettiva degli insegnanti, ed emerge come queste due prospettive siano fortemente intrecciate nell'influenzare i processi di insegnamento e apprendimento della matematica.

In questo numero speciale, sono presenti entrambe le prospettive: sono presentate, infatti, esperienze che riguardano docenti (in formazione e in servizio) e studenti. Le tematiche relative agli aspetti affettivi sono presentate da vari punti di vista e in contesti diversi ma, pur nella loro diversità, i lavori presentano significativi aspetti comuni.

Per quanto riguarda i docenti, negli articoli di Cusi e Morselli e di Muñoz-Rodríguez e Rodríguez-Muñoz, sono presentate delle riflessioni con focus “affettivo” a partire da esperienze di corsi di formazione e sviluppo professionale per docenti di scuola primaria, in formazione e in servizio. Coinvolgere docenti di questo livello scolare in esperienze di formazione che riguardino non solo aspetti cognitivi dell'insegnamento e apprendimento della matematica è di fondamentale importanza. Molte ricerche hanno infatti mostrato come molto spesso le maestre e i maestri, che non hanno una formazione specifica in matematica, si avvicinano all'insegnamento di questa disciplina con un atteggiamento negativo, caratterizzato da emozioni anche molto forti, come ansia e paura, che condizionano le scelte didattiche e possono avere conseguenze negative non trascurabili dal punto di vista dell'apprendimento e dell'esperienza vissuta con la matematica degli studenti.

L'articolo a firma Pierri e il lavoro di Andrà, Amico e Pezzutto hanno invece come focus l'atteggiamento nei confronti della matematica di due categorie di studenti: gli studenti di scuola secondaria di secondo grado, che si avviano verso il delicato passaggio all'istruzione universitaria, e gli studenti ai primi anni di

università, che affrontano la matematica in corsi di studio scientifici.

Più in dettaglio, nell'articolo di Pierri vengono analizzate reazioni di tipo emotivo-affettivo di studenti di una scuola secondaria di secondo grado italiana, durante attività di problem solving. Grazie alle potenzialità delle tecnologie, i ragazzi sono immersi in un contesto di narrazione digitale. Quello che viene osservato, in particolare, è come gli aspetti affettivi vengono influenzati dalla presenza e dai feedback di un esperto che interviene all'interno dell'attività.

Il lavoro di Andrà, Amico e Pezzutto riguarda il rapporto con la matematica di un gruppo di studenti del corso di studi universitario in Scienze dei Materiali di una università italiana. Lo studio, che in parte coinvolge anche il periodo della didattica a distanza dovuto alla pandemia da COVID-19, analizza l'evoluzione della disposizione emotiva degli studenti verso la matematica e l'influenza di questa "evoluzione emozionale" sul senso di auto-efficacia.

Gli aspetti narrativi tornano anche nel lavoro di Cusi e Morselli, lavoro che coinvolge un gruppo di studenti di Scienze della formazione primaria. Viene presentata una esperienza di formazione che va nella direzione di incoraggiare il bisogno di "riscatto" nei confronti delle esperienze negative con la matematica di questi futuri insegnanti, in modo intrecciato con la promozione di un cambiamento nella visione della matematica che spesso risulta essere solo procedurale. Come anticipato, viene usato un approccio narrativo, dal momento che viene chiesto ai futuri docenti di raccontare, con una narrazione scritta, la propria esperienza di formazione.

Ancora dal lato docente, nel lavoro di Muñiz-Rodríguez e Rodríguez-Muñiz viene descritta una particolare esperienza di formazione di docenti in servizio. Nel programma di formazione professionale di cui si parla, vengono coinvolti tutti i docenti del Principato di Andorra dei gradi quinto e sesto, che fanno esperienza di una versione, adattata al contesto e alla situazione di riferimento, della metodologia del Lesson Study. È proprio ciò che accade durante questo percorso, in particolare l'evoluzione delle disposizioni emotive, ad essere analizzato.

Tutte le ricerche presentate in questo numero speciale sono molto promettenti e possono sicuramente dare spunti interessanti per chi voglia riflettere su questi temi, sia come docente, sia come ricercatore.

Digital interactive storytelling in matematica: narrazione digitale come *affective pathway*

Digital interactive storytelling in mathematics: digital storytelling as an *affective pathway*

Digital interactive storytelling en matemática: narración digital como *affective pathway*

Anna Pierri

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione ed Elettrica e Matematica Applicata,
Università degli Studi di Salerno, Italia.

Sunto. *Questo lavoro si colloca nell'ambito di un Progetto di Ricerca di Interesse Nazionale volto alla realizzazione di attività di insegnamento/apprendimento della matematica in ambienti digitali online. La metodologia soggiacente sfrutta una duplice metafora di narrazione ed una opportuna organizzazione didattico-tecnologica, come elementi abilitanti lo sviluppo di competenze matematiche. In particolare, focus del lavoro è l'analisi delle interazioni degli studenti con la narrazione digitale, interazioni influenzate dalla presenza e dal feedback che un adulto-esperto può fornire. Ciò, di conseguenza, provoca reazioni di tipo emotivo-affettivo tra gli studenti che, assumendo un ruolo specifico, si immergono nella storia digitale e agiscono per costruirne una versione originale. In particolare, il percorso affettivo degli studenti è analizzato prendendo in considerazione alcune strutture di coinvolgimento di Goldin, strutture che emergono osservando le discussioni degli studenti nella chat di gruppo. Dai dati qualitativi derivanti da uno studio pilota abbiamo ipotizzato specifiche categorie che includessero aspetti affettivi e cognitivi e che saranno oggetto di ulteriori approfondimenti in lavori successivi.*

Parole chiave: percorsi affettivi, digital storytelling, struttura di coinvolgimento, ruolo dell'insegnante.

Abstract. *This work is part of a Research Project of National Interest aimed at implementing mathematics teaching/learning activities in online digital environments. The underlying methodology exploits a dual metaphor of storytelling and an appropriate didactic-technological organization as enablers for the development of mathematical competences. In particular, the focus of the work is the analysis of students' interactions with digital storytelling, interactions influenced by the presence and feedback that an adult-expert can provide. This, consequently, provokes emotional-affective reactions among students who, assuming a specific role, immerse themselves in the digital story and act to construct an original version of it. In particular, the students' affective pathway is analyzed by considering some of Goldin's structures of*

engagement, structures that emerge from observing students' discussions in the group chat. From the qualitative data derived from a pilot study, we hypothesized specific categories that included affective and cognitive aspects and will be further investigated in future work.

Keywords: affective pathways, digital storytelling, engagement structure, teacher's role.

Resumen. *Este trabajo forma parte de un Proyecto de Investigación de Interés Nacional destinado a implementar actividades de enseñanza/aprendizaje de la matemática en entornos digitales en línea. La metodología subyacente explota la doble metáfora de la narración y una adecuada organización didáctico-tecnológica como facilitadores del desarrollo de la competencia matemática. En concreto, el trabajo se centra en el análisis de las interacciones de los estudiantes con la narración digital, interacciones influidas por la presencia y el feedback que puede proporcionar un adulto-experto. Esto, en consecuencia, provoca reacciones afectivo-emocionales entre los estudiantes que, asumiendo un rol específico, se sumergen en la historia digital y actúan para construir una versión original de la misma. En particular, el recorrido afectivo de los estudiantes se analiza teniendo en cuenta algunas de las estructuras de implicación de Goldin, estructuras que emergen al observar las discusiones de los estudiantes en el chat de grupo. A partir de los datos cualitativos derivados de un estudio piloto, formulamos hipótesis sobre categorías específicas que incluyen aspectos afectivos y cognitivos, que se investigarán más a fondo en trabajos posteriores.*

Palabras clave: trayectorias afectivas, narración digital, estructura de compromiso, papel del profesor.

1. Introduzione

Nel recente periodo di emergenza pandemica si è parlato molto di Formazione a Distanza, con insegnanti di ogni ordine e grado che si sono trovati a trasformarsi in docenti a distanza, con le difficoltà e i vincoli che questo improvviso cambiamento avrebbe comportato dal punto di vista pedagogico, didattico e sociale, e anche con tutti i problemi legati alla maggiore o minore competenza tecnologica dei docenti e all'entità delle attrezzature tecnologiche a disposizione degli studenti. In questa situazione, si è riflettuto molto sul potenziale delle tecnologie per integrare, migliorare e ripensare alcuni aspetti della didattica frontale. Le tecnologie digitali, infatti, svolgono un ruolo sempre più importante nell'istruzione e l'apprendimento online è in grado di offrire notevoli opportunità educative.

In questa direzione sono gli studi condotti nell'ambito del progetto PRIN 2015 "Digital Interactive Storytelling in Mathematics: a competence-based social approach",¹ il cui scopo è quello di sviluppare una metodologia per

¹ Progetto di Ricerca di Interesse Nazionale – Bando 2015 - Prot. 20155NPRA5 Durata: 5 febbraio 2017 - 5 febbraio 2020.

integrare un nuovo approccio di narrazione digitale, di tipo immersivo, in una prospettiva vygotskiana (Vygotsky, 1980), con le opportunità offerte dagli strumenti di comunicazione e interazione digitale, tenendo attentamente conto delle peculiarità della matematica.

L'idea di base, all'interno del progetto è, da un lato, di utilizzare le tecnologie per coinvolgere lo studente in una storia e farlo interagire con altri compagni; dall'altro, creare situazioni problematiche (matematiche) che lo studente, in veste di attore, deve affrontare durante la fruizione della storia. Allo stesso modo, lo studente si trova a dover risolvere problemi che possono riguardare il personaggio da lui scelto come avatar. Sulla base di un canovaccio preparato dall'insegnante, gli studenti diventano quindi attori di una storia che essi stessi contribuiscono a creare, sia attraverso l'interazione con i compagni, sia attraverso le scelte operate nelle situazioni problematiche che progressivamente incontrano.

L'obiettivo principale è quello di consentire, attraverso un DIST-M (Digital Interactive Storytelling in Mathematics), il coinvolgimento attivo di ogni studente, che dovrà pensare e agire come un personaggio della storia, avendo un proprio ruolo e assumendosi il carico emotivo che questa condizione comporta. Ogni studente che partecipa alla storia prende un ruolo ed è chiamato a dare il proprio contributo; infatti, lo studente può essere supportato e deve confrontarsi con i pari, in una prospettiva non solo inclusiva, ma anche in grado di promuovere le competenze comunicative in matematica.

Lo studio, le cui prime sperimentazioni sono state presentate a varie conferenze (Albano et al., 2019; Pierrri, 2022), è basato su una narrazione digitale che vede come protagonisti della storia un gruppo di quattro studenti impegnati nella risoluzione di un problema matematico. A supporto del gruppo c'è la presenza di un adulto esperto (Guru) che interviene nelle discussioni di gruppo in vari momenti, principalmente quando sente che il processo sta rallentando o si interrompe, fungendo da motivatore. Quindi, attraverso le osservazioni e l'analisi delle interazioni tra pari e con l'esperto, cerchiamo di rispondere alle seguenti domande di ricerca:

- RQ1: Come fa un esperto, che funge da guida, da facilitatore, a sapere quando intervenire nell'apprendimento di gruppo?
- RQ2: Quali emozioni suscita negli studenti la presenza del Guru nella narrazione digitale?

Partendo da studiosi come Hannula (2002) e Cobb et al. (1989), che hanno indagato la componente affettiva degli studenti durante attività didattiche incentrate sul problem solving, intendiamo analizzare gli aspetti affettivi nel problem solving collaborativo; più specificatamente vogliamo analizzare come, in un contesto di narrazione digitale, gli aspetti affettivi, fortemente connessi ai fattori cognitivi, siano influenzati dalla presenza e dal contributo di un esperto della conoscenza, intervenuto nell'apprendimento di gruppo in qualità di facilitatore.

1.1. La dimensione affettiva

Le sperimentazioni, condotte nell'ambito del progetto PRIN, hanno mostrato che la riproducibilità di attività basate sulla metodologia del DIST-M, anche in modalità Didattica a Distanza (DAD), rappresenta un terreno fertile su cui studiare l'influenza di fattori affettivi che intervengono nei processi di apprendimento della matematica.

Il termine *affect* viene usato in didattica della matematica come un "ombrello", sotto il quale poter posizionare tutti quegli aspetti del pensiero umano che non riguardano la pura cognizione, come ad esempio le emozioni, le convinzioni, l'atteggiamento, il valore, la motivazione, i sentimenti e gli obiettivi (Hannula, 2011).

Interamente dedicato alle ricerche relative all'influenza dei fattori affettivi sul processo di problem solving è il lavoro di McLeod e Adams (1989) "*Affect and mathematical problem solving*", in cui viene preso in considerazione il ruolo degli aspetti metacognitivi e quindi il "sense making" degli studenti, soprattutto quando essi si trovano di fronte alla risoluzione di problemi.

Nella visione integrata di aspetti affettivi e cognitivi si inserisce l'approccio di DeBellis e Goldin (1997) secondo cui il sistema affettivo è uno dei vari sistemi di rappresentazione interni attraverso cui si struttura il funzionamento mentale di ciascun individuo. Goldin (2002), in particolare, sottolinea come "il sistema affettivo non si limita ad accompagnare la cognizione, né si manifesta come una risposta inessenziale alla rappresentazione cognitiva, ma l'affettività stessa ha una funzione rappresentazionale" (Goldin, 2002, p. 60, traduzione dell'autrice). In particolare i sistemi di rappresentazione cognitivi funzionano in parte proprio grazie all'evocazione delle componenti affettive e delle informazioni che queste codificano: ad esempio le metafore che si usano per pensare possono evocare una dimensione affettiva positiva o negativa.

Da un punto di vista metodologico, l'interazione tra *aspetti affettivi e cognitivi* richiede uno studio alquanto complesso. Recenti sono gli studi aventi come oggetto l'interazione tra queste due prospettive teoriche (Albano et al., 2021).

Pertanto, oltre alla componente cognitiva che entra in gioco nei processi di apprendimento della matematica, siamo interessati in questo lavoro, ai *pathways affettivi* descritti da DeBellis e Goldin (2006) come "una sequenza di stati (locali) di sensazioni, alquanto complesse che interagiscono con configurazioni cognitive di rappresentazioni" (p. 134, traduzione dell'autrice).

Questa sequenza di stati di sensazioni complesse è ben osservabile in situazioni di problem solving dove, data la natura stessa dell'attività, gli studenti si trovano a dover fronteggiare situazione di impasse e costruire nuove rappresentazioni cognitive. È in questa direzione che va la progettazione del DIST-M, in cui il percorso cognitivo che lo studente segue verso la dimostrazione finale presenta dei punti di arresto, delle situazioni di impasse, degli avanzamenti. Le cause dell'alternanza di questi momenti risiedono solo in

parte nel dominio cognitivo; essi, infatti, afferiscono anche al dominio affettivo.

1.2. *Engagement*

L'*Engagement* è ritenuto, in generale, un aspetto fondamentale fortemente legato ai risultati dell'apprendimento e che può essere definito come una reazione emotiva alle interazioni dello studente con il docente, con i pari e con l'ambiente di apprendimento.

In tale framework si collocano le strutture di coinvolgimento (*engagement structure*) definite da Goldin (2017) per inquadrare l'analisi della natura complessa delle emozioni ed in particolare delle interazioni tra aspetti individuali e sociali delle esperienze di problem solving degli studenti in matematica.

Esse includono, quindi, obiettivi, azioni, comportamenti, scambi sociali, pensieri, emozioni che interagiscono tra loro dinamicamente.

Nello specifico, tra le strutture dettagliate da Goldin nei suoi lavori, consideriamo le seguenti: *Let Me Teach You*, il desiderio di spiegare la procedura o il concetto matematico ad un pari; *I'm Really Into This*, il desiderio motivante di vivere l'esperienza dell'apprendimento della matematica; *Help me*, ottenere aiuto o supporto per risolvere o comprendere un problema matematico.

In particolare, analizzando i dati derivanti dalla sperimentazione, vediamo come queste strutture risultano o meno evidenti nel pathway affettivo degli studenti.

1.3. *La competenza argomentativa*

Fin dai primi anni di scuola lo sviluppo di competenze argomentative appare come un obiettivo di apprendimento trasversale e transdisciplinare da perseguire. Nello specifico, per l'apprendimento della matematica, il framework PISA (OECD, 2017) include le azioni di "riflettere su argomentazioni matematiche e spiegare e giustificare risultati matematici" (OECD, 2017, p. 69) nel modello della *literacy matematica* come parte del processo di utilizzare concetti matematici, fatti, procedure e ragionamenti.

Tuttavia, argomentare non è solamente una competenza da sviluppare ma può rappresentare anche il fondamento di un efficiente metodo didattico focalizzato sulla costruzione di significati matematici.

Affinché questo possa realizzarsi, il docente deve essere in grado di cogliere e sfruttare i vari momenti per discutere con i propri allievi di come e perché una certa strategia matematica possa funzionare e allo stesso tempo analizzare, nella discussione con gli alunni, le spiegazioni che essi stessi possano fornire, cercando di far emergere gli impliciti. Scenario fertile in cui ciò possa realizzarsi, consentendo quindi al docente di creare opportunità per argomentare è individuato nelle attività di risoluzione di problemi.

L'argomentazione, infatti, è strettamente interconnessa con il problem solving (Di Martino, 2017): per avere accesso al ragionamento risolutivo

seguito da un allievo abbiamo bisogno di informazioni sulle strategie e sui processi che ha attivato (ossia abbiamo bisogno che lo studente ci spieghi come ha ragionato) e sulle giustificazioni delle scelte fatte (ossia abbiamo bisogno che lo studente ci spieghi perché ha ragionato in quel modo).

Più in dettaglio, attraverso la metodologia del DIST-M, descritta nella sezione successiva, il nostro focus è nella competenza del *reasoning* che è cruciale per il pensiero matematico: partire da un quesito matematico, formulare congetture sulla sua risoluzione e argomentare sulla risposta trovata o ipotizzata fino a dimostrarne la ‘validità’ o a validarla.

La competenza di *reasoning* riguarda diversi aspetti del processo di argomentazione e giustificazione di enunciati matematici. In particolare, essa comprende la capacità di ideare e produrre in modo autonomo dimostrazioni matematiche e di trasformare possibili argomentazioni euristiche in dimostrazioni matematiche (Magenes & Maracci, 2015).

2. I personaggi della storia

Il problema matematico, considerato nell’ambito del progetto, è stato scelto in modo che potesse supportare l’introduzione degli studenti alla modellizzazione algebrica, al ragionamento, alla dimostrazione. Il problema è il seguente: “Scegli quattro numeri naturali consecutivi, moltiplica i due intermedi fra loro, moltiplica i due estremi, e sottrai i risultati. Che cosa ottieni?” (Mellone & Tortora, 2015, p. 4).

Il quesito è contestualizzato all’interno di una storia, dove i protagonisti si trovano alle prese con il problema di interpretare la “regolarità” nascosta in alcune stringhe di numeri e operazioni, contenute in un messaggio ricevuto dallo spazio, dagli alieni. I protagonisti sono, quindi, chiamati a esplorare le regolarità tra le quaterne a congetturare qual è il risultato delle operazioni, formalizzare la congettura e dimostrarla.

Un’attività di questo tipo, dunque, può essere utile a rafforzare conoscenze e abilità matematiche già possedute dallo studente, trasformandole in competenze; consente di trattare numerosi argomenti di vari livelli scolastici e di far crescere abilità linguistiche, argomentative, di rappresentazione, di calcolo.

Le attività sono inquadrare in una narrazione nella quale ci sono dei personaggi che agiscono come avatar dei vari studenti partecipanti. Le competenze chiave illustrate precedentemente sono incapsulate in cinque distinti personaggi (o ruoli) all’interno dello storytelling. Nello specifico, i personaggi lavoreranno in gruppo all’interno dello storytelling, ognuno con un compito ben preciso: *Peste*, pone domande, prova a rendere chiara ogni cosa; *Blogger*, annota e condivide tutti i risultati del gruppo in una forma scritta; *Boss* coordina il gruppo di lavoro e tiene ben chiaro l’obiettivo; *Promoter* suggerisce nuove idee e cerca nuove strade. In caso di difficoltà, Promoter può chiedere

aiuto ad un quinto personaggio, *Guru* (un esperto esterno, tipicamente l'insegnante o un ricercatore) che, altrimenti, non sarebbe pienamente coinvolto nella storia. Il Guru interviene durante le interazioni tra gli attori con l'obiettivo di far loro chiarire i propri commenti e osservazioni o migliorare la comunicazione. Questo tipo di approccio personalizzato promuove l'impegno in prima persona all'interno della storia, mentre il lavoro di gruppo supporta la costruzione sociale di (eventualmente nuova) conoscenza condivisa.

In sintesi, abbiamo una storia, organizzata in 5 episodi, in cui gli studenti interpretano dei personaggi. A loro viene assegnato un proprio ruolo (che cambia da un episodio all'altro) e azioni specifiche da eseguire in base al loro ruolo nell'episodio. Alcuni compiti sono individuali, altri collaborativi e richiedono quindi un buon livello di comunicazione e coordinamento. Vale la pena di dire che gli studenti, in base al nostro approccio alla narrazione, non "creano" la storia che stanno interpretando, poiché così facendo sarebbe difficile prevederne le direzioni e il successo.

3. Metodologia

3.1. Il disegno dell'attività

Il contesto entro cui nasce e si sviluppa il problema matematico evolve attraverso varie fasi di azione (corrispondenti ad altrettanti episodi della storia) con precisi obiettivi, fondamentali per la costruzione delle competenze argomentativa e comunicativa e di avvio alla dimostrazione matematica.

Inizialmente abbiamo la fase di *Esplorazione*, dove il problema viene esplorato e prime ipotesi riguardanti le soluzioni sono proposte; tale fase è seguita da quella di *Congettura*, volta a raffinare l'ipotesi precedentemente proposta spesso in linguaggio parlato per ottenere una chiara e completa congettura. Terza e successiva fase è la fase di *Formalizzazione*, nella quale la migliore o più promettente congettura è tradotta in linguaggio matematico: questa rappresenta un passaggio essenziale per innescare pienamente la fase successiva, ossia quella di *Dimostrazione* dove lo studente mette in campo tutte le conoscenze matematiche per dimostrare (o confutare) la congettura prodotta.

Infine, la fase di *Riflessione* consente agli studenti di ripercorrere eventualmente la storia da un punto di vista matematico e di produrre una dichiarazione da condividere con la comunità.

Ognuna di queste fasi, come precedentemente anticipato, corrisponde ad un episodio della storia. Ogni episodio evolve secondo uno stesso schema.

All'inizio gli studenti lavorano tra loro, senza un intervento esplicito dell'esperto. Tuttavia Guru è presente in background a due livelli: da un lato, potendo osservare tutto quanto accade nel gruppo dei pari, se si accorge che questi hanno bisogno di aiuto, può fornirglielo per via di un canale privilegiato di comunicazione con il Promoter; dall'altro lato, se il gruppo si rende conto di non avere al suo interno altre risorse da mettere in gioco per la risoluzione del

problema, può rivolgersi a Guru (nella sua veste di ‘saggezza’) per chiedere aiuto, attraverso il Promoter. La fase di lavoro tra pari ha l’obiettivo di arrivare a un prodotto condiviso da tutti i membri, che diventa oggetto di discussione e confronto esplicito con l’esperto in una fase successiva. Questa seconda fase serve a sistematizzare e istituzionalizzare quanto prodotto dai pari, e permette di passare all’episodio successivo. Al termine di tutti gli episodi, ogni gruppo di studenti torna indietro a ‘rivedere’ la storia, e ricostruisce collettivamente il racconto del processo di risoluzione del problema matematico. Questo racconto diventa per l’insegnante il prodotto da valutare (in termini di competenze - argomentativa e comunicativa - e di conoscenze matematiche) come valutazione di gruppo. In concreto, nel DIST-M il coinvolgimento degli studenti avviene su più piani:

- sul piano emotivo e motivazionale, immergendo tutti gli studenti in una storia adeguatamente supportata dall’ambiente di apprendimento appositamente configurato;
- sul piano cognitivo, come una “sfida” in grado di:
 - richiamare conoscenze pregresse e tale da generare nuova conoscenza (e approfondimento) in maniera collaborativa ed individuale,
 - sviluppare competenze argomentative, mediante l’uso di più canali comunicativi in grado rappresentare e supportare più registri linguistici, favorendone al contempo l’evoluzione;
- sul piano metacognitivo, attraverso i ruoli, portando a galla le abilità tipiche del “fare matematica” con la possibilità di riflettere sulle attività svolte in modo cosciente.

La tecnologia permette di intervenire su ciascuno di questi piani e di realizzare un’attività didattica autenticamente inclusiva. Tutti gli studenti della classe vivono la medesima esperienza, da ogni punto di vista e ruolo, contribuiscono attivamente alla storia, hanno la possibilità di osservare e di ritornare sui propri passi, di riflettere sui ruoli e sulle abilità coinvolte, in itinere e dopo. Tutto ciò è possibile solo grazie ad un buon supporto tecnologico, l’unico in grado di raccogliere, registrare e rendere disponibili a studenti e docenti i tanti flussi paralleli che, inevitabilmente, finirebbero per confondersi e lasciare ben poca traccia in uno scenario didattico tradizionale.

3.2. Il contesto d’uso e le strutture di coinvolgimento

La metodologia di DIST-M sviluppata permette agli studenti di partecipare alla storia in due modi diversi. Per ogni episodio abbiamo:

- un gruppo di studenti che agisce come Attore: ogni studente del gruppo assume il ruolo di uno dei personaggi sopra descritti;
- gli altri gruppi agiscono come Osservatori attivi e consapevoli: ogni studente si occupa di osservare uno specifico personaggio della storia e riflette su come il personaggio osservato si comporta rispetto sia al problema

matematico sia al ruolo che sta interpretando.

Per consentire ad ogni studente di prendere parte e giocare all'interno della storia, abbiamo diviso in gruppi da quattro gli studenti partecipanti (uno per ogni personaggio). Nel problem solving collaborativo non strutturato, gli studenti spesso rimangono nel ruolo in cui si sentono più a loro agio. Nel modello proposto, invece, sia i gruppi di Attori che di Osservatori ruotano, così come i ruoli all'interno di ciascun gruppo. Ad esempio, se nel primo episodio un gruppo ha giocato come Attori, nel secondo episodio giocherà come Osservatori e un gruppo che ha giocato come Osservatori giocherà come Attori. Inoltre, se uno studente ha giocato come Boss nel primo episodio, nel secondo episodio giocherà come Osservatore con un ruolo diverso da quello di Boss. In questo modo, ogni studente sperimenta (come Attore o Osservatore) tutte le funzioni cognitive, e questo può portare a sviluppare tali funzioni da parte di ciascuno. Il costante cambio di prospettiva, passando da Attore a Osservatore e da un ruolo all'altro, ha lo scopo di aiutare a interiorizzare tutti i ruoli e le fasi (Vygotskij, 1980).

La sperimentazione, presentata in questo lavoro, ha visto la partecipazione di 26 alunni di una scuola secondaria di secondo grado. Essi hanno lavorato in un periodo temporale concordato con l'insegnante che ha seguito e monitorato la sperimentazione.

Relativamente alle strutture di coinvolgimento possiamo osservare che l'aspetto immersivo del DIST-M è fortemente legato alla struttura di coinvolgimento *I'm Really Into This*: ogni studente "entra nella storia" come personaggio, come attore o come osservatore. Il ruolo di Guru vede la presenza della struttura di coinvolgimento *Help Me*, in quanto capace di fornire (esplicitamente o implicitamente) una varietà di indizi e suggerimenti per poter soddisfare le esigenze degli studenti, superando, in questo modo, situazioni di impasse che hanno provocato una interruzione del processo di apprendimento.

4. Analisi dei dati

Per cercare di rispondere alle domande di ricerca RQ1 e RQ2, indagando quindi sui fattori affettivi (emozioni, atteggiamenti, interessi) in gioco nelle interazioni all'interno della narrazione digitale, abbiamo utilizzato sia le informazioni estrapolate dalla piattaforma di e-learning, su cui è stata eseguita la sperimentazione, sia i dati del questionario finale somministrato agli studenti al termine della sperimentazione.

L'analisi dei dati da noi condotta è limitata alle interazioni degli studenti nelle varie chat (chat tra pari e chat tra Promoter e Guru) per la sola fase di Congettura. In tale fase, successiva a quella di Esplorazione, gli studenti sono chiamati a condividere con i loro pari la formulazione di una congettura. È atteso, infatti, che lo studente identifichi la regolarità, le condizioni di regolarità e formuli le prime argomentazioni che rendano plausibile la congettura prodotta.

La fase di Congettura è associata all'episodio "Arrivano gli alieni 2" della storia, episodio svolto dagli studenti partecipanti alla sperimentazione in circa tre ore: nella prima ora gli studenti, suddivisi in gruppo, hanno lavorato individualmente in una aula laboratoriale della scuola; le altre due ore sono state eseguite da remoto in orario extra-curricolare. Di seguito uno stralcio della chat tra pari:

Peste: dunque, in una serie di numeri consecutivi, se facciamo la differenza tra il prodotto del primo e del secondo termine che sono sempre consecutivi e tra il primo e il quarto termine che hanno 2 come differenza, il risultato sarà sempre 2.

Peste: Se fosse fatto in un altro modo non sarebbe 2.

Boss: Sì, per me il ragionamento è ottimo.

Peste apre la conversazione esprimendo la propria congettura, congettura sostenuta da una argomentazione seppur debole ("Se fosse fatto in un altro modo non sarebbe 2"). Osserviamo qui la presenza della struttura *Let me teach you*, ossia Peste prova a spiegare il concetto matematico legato al problema da risolvere ad un suo pari (Boss). La conversazione termina poi con l'approvazione di Boss che sostiene essere un ottimo ragionamento.

Successivamente all'interazione tra Promoter e Guru i ragazzi discutono per trovare una congettura:

1 Promoter: Ho detto a Guru che abbiamo trovato una formula

2 Peste: Non credo

3 Promoter: Me lo sta dicendo adesso

4 Promoter: Eh... ma sono bloccato

5 Promoter: Come dobbiamo procedere?

6 Blogger: Riassumiamo: se sottraiamo il prodotto dei medi e degli estremi di 4 numeri consecutivi, il risultato è sempre 2

7 Guru: Fede, ci sei?

8 Guru: Guarda, ho una app che vi può aiutare con le parole

9 Promoter: Appaiono tante parole utili per spiegare la formula

10 Boss: Sì

11 Promoter: Dobbiamo ricostruire un teorema a partire da quelle parole

Nel primo estratto (righe 1-6) possiamo facilmente osservare che l'esperto (Guru) non interviene durante la discussione. Si limita a leggere e osservare, rimandando il suo intervento a un momento successivo (riga 7).

Gli studenti, partendo dalla discussione tra Promoter ed esperto, cercano di formulare la congettura, mostrando alcune difficoltà (confronta riga 4 e riga 5).

Blogger (riga 6) cerca di riassumere, ma il suo tentativo non è sufficiente a superare l'impasse. Il docente-esperto, allora, osservando la discussione, decide di attivare una applicazione digitale per indirizzare gli studenti verso la costruzione della congettura, fornendo quindi una chiara risposta alla domanda

di ricerca RQ1.²

Per poter dare una risposta alla seconda domanda di ricerca RQ2, abbiamo provato ad interpretare le risposte al questionario somministrato agli studenti alla fine della fase di sperimentazione. In particolare abbiamo chiesto agli studenti:

- Q1: “Cosa pensi di Guru?”
- Q2: “Ti saresti sentito più a tuo agio se Guru fosse stato un tuo coetaneo con più esperienza”?

Senza dubbio gli studenti hanno riconosciuto in Guru il ruolo di facilitatore, di guida, come testimoniano le risposte alla domanda Q1 di seguito elencate. Va osservato che, con gli acronimi PO#, BO#,BLO#, PRO#, indichiamo i ruoli ricoperti rispettivamente da ciascuno degli osservatori di Peste, Boss, Blogger e Promoter:

- 41 Peste: Penso che sia il personaggio più importante della storia.
- 42 Promoter: Penso che Guru sia stato utile per risolvere l'enigma perché è stato in grado di sostenere i ragazzi.
- 43 Boss: Penso che il personaggio di Guru sia stato utile e sia un buon personaggio.
- 51 BLO1: Penso che sia stato molto utile, perché ci ha fatto rielaborare le nostre idee.
- 52 BLO2: È molto bravo. Ci ha aiutato quando la soluzione non era corretta.
- 61 BO1: È stato molto bravo a eliminare i dubbi e ad apportare modifiche alla soluzione quando necessario.
- 63 BO3: È molto assillante però è anche molto divertente rispondere alle sue domande.
- 71 PO1: Bella idea, ma quando fa le domande sembra di fare un vero e proprio test; dovrebbe coinvolgere di più i personaggi e rendere le domande più semplici.
- 72 PO2: Penso che sia il personaggio principale della storia, anche se potrebbe essere un po' più veloce:).
- 81 PRO1: Grazie al suo coinvolgimento abbiamo potuto confrontarci con una persona che ne sapeva più di noi sull'argomento ed è stata in grado di sostenerci quando abbiamo chiesto aiuto.
- 83 PRO3: Penso che a volte Guru faccia troppe domande, ma è accettabile visto che il suo lavoro consiste nel trovare la soluzione giusta.

Dalle risposte fornite si evincono alcune impressioni negative da parte degli studenti: espressioni di noia come “dovrebbe coinvolgere di più i personaggi” (riga 71); oppure espressioni che evocano emozioni contrastanti come “potrebbe essere un po' più veloce” (riga 72) in opposizione a “Bella idea” (riga 71) o ancora “Assillante... e molto divertente” (riga 63).

² L'app digitale è rappresentata da un tool linguistico, cosiddetto Interactive Semi-open Questions (ISQ), che consente allo studente di costruire una frase o un'affermazione trascinando tessere digitali opportunamente scelte dall'esperto.

A conclusione della nostra analisi, effettuata incrociando la conversazione nella chat dei personaggi con Guru (righe 1-11) e le risposte fornite dagli studenti (righe 41-83), una prima considerazione riguarda la proficua partecipazione degli studenti alla storia: infatti, la vivace conversazione in tutti gli episodi, sia tra i coetanei che tra coetanei ed esperto, evoca il desiderio dei partecipanti di sentirsi immersi nella storia.

Gli stralci delle risposte degli studenti alla domanda Q2, di seguito riportati, mostrano le emozioni che la presenza di un adulto esperto suscita negli studenti:

- 100 Peste: Stando a contatto con i tuoi coetanei c'è più intesa e più libertà nel dialogo.
- 101 Promoter: Con una persona più vicina alla mia età mi sentirei a mio agio perché credo che riuscirei a parlare con più tranquillità e sicurezza.
- 102 Boss: In alcuni casi, ho trovato difficile esprimere le mie opinioni a Guru.
- 103 BLO1: Non sarebbe cambiato nulla perché fondamentalmente non mi sento a mio agio a parlare con persone che non conosco.
- 104 BLO2: Vado molto d'accordo con le persone più grandi di me, mi piace parlare con loro e confrontarmi.
- 108 PO2: Perché Guru era simpatico e riusciva a farci sentire a nostro agio.
- 109 PO3: Una differenza di età non mi fa molto effetto.
- 110 PO4: Non cambia nulla la sua età perché comunque è dietro uno schermo.
- 111 PRO1: Credo che non sarebbe cambiato nulla, anche se avesse avuto la mia età.
- 114 PRO4: Perché, comunque, una persona più vicina alla nostra età conosce meglio il nostro modo di pensare/ragionare.

5. Discussione e conclusioni

Vogliamo, innanzitutto, sottolineare come il pieno coinvolgimento degli studenti nella storia abbia davvero motivato lo studente. Facendo riferimento alle parole usate dagli stessi studenti con l'insegnante, durante una discussione in classe, essi affermano: “mi è piaciuto mescolare la matematica con le storie”; quindi questo risultato ha messo in evidenza come l'essere immersi in una storia interattiva abbia motivato lo studente, il che è in linea con l'obiettivo dell'engagement structure “*I'm Really into*”.

Non sono poi mancate, nel pathway affettivo degli studenti, situazioni di stallo in cui lo studente è rimasto bloccato. Tale situazione è molto ben rimarcata da frasi del tipo “sono bloccato... (...) come dobbiamo procedere?”, frasi che esprimono un chiaro senso di disagio, richiedendo, quindi, la messa in campo dell'esperto.

Si evincono poi emozioni contrastanti alternate tra fiducia e disagio per la presenza di Guru nella storia. C'è quindi un'altalena di pathway affettivi, caratterizzati da un lato da ansia, situazioni di blocco (come precedentemente osservato), dall'altro da atteggiamenti positivi, come rimarcato da espressioni del tipo “era simpatico...riusciva a farci sentire a nostro agio”. Questo

probabilmente va collegato al progressivo sviluppo di pensiero critico negli studenti. Tenendo conto di questa duplice lente (aspetto emotivo e componente cognitiva), siamo andati a definire, a posteriori, alcune possibili categorie, a partire dall'analisi dei dati

Le categorie, oggetto di esplorazione di futuri lavori, provano a fornire una risposta alla problematica di ricerca. Pertanto abbiamo definito:

- **categoria 1:** *confidence vs sviluppo del pensiero critico*. Le espressioni usate dagli studenti nelle loro interviste, come “vado molto d'accordo con le persone più grandi di me” (riga 104); “Guru era simpatico” (riga 108); “una differenza di età non mi fa molto effetto” (riga 109); “non cambia nulla la sua età” (riga 110) ci fanno supporre che questi studenti non siano imbarazzati dalla presenza di un esperto. Quindi, probabilmente riconoscono anche il valore aggiunto che la presenza di Guru, nelle loro interazioni, potrebbe dare agli aspetti cognitivi. Le interazioni tra loro e con l'esperto, infatti, potrebbero generare nuova conoscenza in modo collaborativo e individuale e, di conseguenza, sviluppare competenze argomentative. Inoltre, l'uso del digitale nell'apprendimento può andare nella stessa direzione; infatti, l'espressione “dietro uno schermo” (riga 110) porta a pensare a come l'uso del digitale nei contesti di apprendimento possa favorire lo sviluppo della conoscenza;
- **categoria 2:** *ansia vs uso di registri comunicativi*. Le espressioni usate dagli studenti nelle loro interviste, come “maggiore libertà” (riga 100); “con più tranquillità e in modo più rilassato” (riga 101); “ho trovato difficile esprimere le mie opinioni a Guru” (riga 102) evidenziano le difficoltà linguistiche nell'interazione con il Guru e, quindi, la necessità di usare registri letterati. Per questi studenti la presenza di un adulto, nella chat tra pari, provoca emozioni di ansia, imbarazzo, come sottolineato anche nella riga 114 “una persona più vicina alla nostra età conosce meglio il nostro modo di pensare/ragionare”. Probabilmente, questi studenti percepiscono la necessità, e quindi la difficoltà, di utilizzare un registro comunicativo diverso. È chiaro che la comunicazione è influenzata dal contesto: il contesto della situazione, cioè lo spazio, il tempo, i partecipanti come individui, il contesto della cultura, che riguarda le credenze e le conoscenze sui partecipanti e gli argomenti della comunicazione (Ferrari, 2021);
- **categoria 3:** *indifferenza vs apprendimento passivo*. Pochi studenti esprimono atteggiamenti di indifferenza rispetto alla nuova situazione. Le espressioni usate dagli studenti come: “fondamentalmente non mi sento a mio agio a parlare con persone che non conosco” (riga 103); “credo che non sarebbe cambiato nulla, anche se avesse avuto la mia età”. (riga 111) sottolineano una scarsa interazione sia tra coetanei che con il Guru.

Tuttavia, va comunque precisato che la definizione delle categorie sopra dettagliate è stata fatta analizzando i dati quantitativi di una sperimentazione a

cui hanno preso parte circa 26 studenti; questo sicuramente potrebbe rappresentare una limitazione del lavoro, per questo ci riserviamo di validare ed approfondire tali categorie su campioni più grandi.

Riferimenti bibliografici

- Albano, G., Antonini, S., Coppola, C., Dello Iacono, U., & Pierri, A. (2021). “Tell me about”: a logbook of teachers’ changes from face-to-face to distance mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 108(1-2), 15–34. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10108-2>
- Albano, G., Pierri, A., & Polo, M. (2019). Engagement in mathematics through digital interactive storytelling. In U. T. Jankvist, Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 1550–1557). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1989). Young children’s emotional acts while engaged in mathematical problem solving. In D. B. McLeod & V. A. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp.117–148). Springer.
- DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (1997). The affective domain in mathematical problem solving. In: E. Pekkonen (Ed.), *Proceedings of the PME 21* (Vol. 2, pp. 209–216). PME.
- DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in mathematics*, 63(2), 131–147. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9026-4>
- Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, (1), 23–37. <https://doi.org/10.33683/ddm.17.1.2>
- Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. UTET Università.
- Goldin, G. A., (2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. In G. C. Leder, E. Pekkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 59–72). Kluwer Academic Publishers.
- Goldin, G. A. (2017). Motivating desires for classroom engagement in the learning of mathematics. In C. Andrà, D. Brunetto, E. Levenson, & P. Liljedahl (Eds.), *Teaching and learning in math classrooms—emerging themes in affect-related research: Teachers’ beliefs, students’ engagement and social interaction* (pp. 219–229). Springer Nature.
- Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 25–46. <https://doi.org/10.1023/A:1016048823497>
- Hannula, M. S. (2011). The structure and dynamics of affect in mathematical thinking and learning. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th conference of ERME* (pp. 34–60). University of Rzeszów.
- Magenes, A., & Maracci, A. (2015). Le competenze nella soluzione di problemi di

- matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 38A-B(5), 637–656.
- McLeod, D. B., & Adams, V. M. (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Springer Science & Business Media.
- Mellone, M., & Tortora, R. (2015). Ambiguity as a cognitive and didactic resource. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1434–1439). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
- OECD (2017). *PISA 2015 Assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics, financial literacy and collaborative problem solving, revised edition*. PISA, OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>
- Pierri, A. (2022) Digital interactive storytelling in mathematics: An engagement structure enriched by the Guru stimuli. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME12)*. (pp. 1416–1423). ERME / Free University of Bozen-Bolzano.
- Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Tra passato e futuro: storie di futuri insegnanti di matematica di scuola primaria¹

Between past and future: stories of pre-service mathematics primary teachers

Entre pasado y futuro: historias de futuros profesores de escuela primaria

Annalisa Cusi¹ e Francesca Morselli²

¹ *Dipartimento di Matematica, La Sapienza Università di Roma, Italia.*

² *Dipartimento di Matematica, Università di Genova, Italia.*

Sunto. *Nel contributo si presenta una metodologia per la formazione iniziale degli insegnanti di matematica avente focus anche sugli aspetti affettivi. Si analizzano i report redatti alla fine di ogni lezione dai futuri insegnanti per studiare l'evoluzione del loro atteggiamento nei confronti della matematica e dell'insegnamento della matematica e lo sviluppo della loro identità di insegnanti.*

Parole chiave: formazione iniziale degli insegnanti di matematica, identità, atteggiamento.

Abstract. *We present a method for pre-service mathematics teacher education with a focus also on affect. We analyze the written reports that the pre-service teachers wrote at the end of each lesson to study the evolution of their attitude towards mathematics and mathematics teaching and the development of their identity as future teachers.*

Keywords: pre-service mathematics teacher education, identity, attitude.

Resumen. *En esta contribución se presenta una metodología para la formación inicial de profesores de matemática centrada en los aspectos afectivos. Se analizan los informes escritos que presentan los futuros profesores al final de cada lección para así estudiar la evolución de su actitud hacia la matemática y hacia la enseñanza de la matemática aportando de esta forma al desarrollo de su identidad como profesores.*

Palabras clave: formación inicial de profesores de matemática, identidad, actitud.

¹ Il presente articolo riprende, estendendo ed affinando l'analisi dei dati, il seguente contributo in atti di convegno: Cusi, A., & Morselli, F. (2022). Between past and future: stories of pre-service mathematics teachers' professional development. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 195–202). PME.

1. Introduzione

La ricerca in didattica della matematica riconosce da anni il ruolo centrale dei fattori affettivi nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica (Hannula et al., 2019). Coerentemente, occorre tenere conto della dimensione affettiva anche nel contesto della formazione iniziale e continua degli insegnanti di matematica, come rilevato, tra gli altri, da Hodgen e Askew (2011). Facendo in particolare riferimento agli insegnanti in formazione iniziale, un punto cruciale è progettare e implementare attività di formazione che prendano in considerazione anche la dimensione affettiva, in un'ottica di crescita e sviluppo. Nel momento in cui si progetta un intervento, è necessario tenere presente che gli insegnanti in formazione iniziale sono sospesi tra il passato da studenti (spesso in difficoltà nel caso dei futuri insegnanti di scuola primaria) e il futuro da insegnanti. A tal proposito, Di Martino e colleghi (2013) descrivono il fenomeno del “*desire for math redemption*” (desiderio di riscatto nei confronti della matematica, nel seguito di questo articolo): “the desire to face the “challenge” of teaching mathematics, starting from a personal reconstruction of the relationship with the discipline (il desiderio di affrontare la sfida della matematica a partire da una personale ricostruzione del rapporto con la disciplina” (p. 226, traduzione delle autrici). Risulta dunque importante promuovere specifiche attività di formazione mirate ad innescare un processo di “riscatto” nell’esperienza dei futuri insegnanti.

In questa prospettiva si articola, per esempio, il lavoro di Panero e colleghi (2020), che presentano una progettazione a lungo termine di attività finalizzate a migliorare l’atteggiamento verso la matematica dei futuri insegnanti di scuola primaria. Aspetti caratterizzanti delle attività progettate sono, tra gli altri, la condivisione delle emozioni, la rivalutazione del ruolo dell’errore, la realizzazione di esperienze positive con la matematica in contesti informali. Un altro esempio di progettazione focalizzata sulla dimensione affettiva è proposto da Morselli e Sabena (2015), che descrivono un percorso di formazione basato sulla risoluzione di problemi seguita da una ricostruzione narrativa degli “*affective pathways*” (percorsi affettivi), cioè una narrazione dell’alternarsi di emozioni (paura, confusione, smarrimento, sollievo, gioia...) nel corso della risoluzione dei problemi. Le autrici sottolineano che in fase di formazione iniziale è necessario agire in due sensi: da un lato, lavorare in continuità con il bisogno di riscatto, dall’altro promuovere una discontinuità con una visione procedurale della matematica che proviene dalle precedenti esperienze da studenti. In questo contributo, si presenta una metodologia di formazione iniziale volta proprio a creare le condizioni per il riscatto nei confronti della matematica.

2. La metodologia di formazione

La metodologia proposta è stata sviluppata in continuità con quella per la

formazione degli insegnanti in servizio proposta da Cusi e Malara (2016), in linea con gli approcci alla formazione degli insegnanti di matematica focalizzati sul ruolo chiave della riflessione sulla pratica (Jaworski, 2004) e sullo sviluppo della consapevolezza nell'insegnamento (Mason, 2008). La metodologia sviluppata da Cusi e Malara (2016) è caratterizzata dalle seguenti fasi: (1) *condivisione e studio di strumenti teorici*; (2) uso degli strumenti teorici per analizzare attività per le classi e stralci di discussioni condotte durante sperimentazioni didattiche (*analisi della pratica di altri docenti*); (3) uso degli strumenti teorici per progettare e implementare attività nelle proprie classi (*fase di progettazione e azione*); (4) uso degli strumenti teorici per analizzare le discussioni collettive condotte nelle proprie classi (*analisi della propria pratica*); (5) *riflessioni condivise* tra docenti e formatori/ricercatori.

Nel caso di corsi per la formazione dei futuri insegnanti, che non lavorano ancora a scuola, i partecipanti non hanno modo di implementare nelle proprie classi le attività create e, di conseguenza, di analizzare la propria pratica e condividere le proprie riflessioni (fasi 3-4-5 della metodologia per la formazione dei docenti in servizio). Per questo motivo, abbiamo ideato attività di tipo narrativo (Cusi & Morselli, 2018), in cui i futuri insegnanti devono immaginare cosa potrebbe succedere in una ipotetica classe dove le attività progettate vengono implementate. L'ipotesi sottesa è che un approccio di tipo narrativo possa stimolare la riflessione sulla matematica e il suo insegnamento, con particolare riferimento al ruolo cruciale del docente. L'attività narrativa caratterizzante la nostra metodologia si articola nei seguenti passi:

1. ai futuri insegnanti viene richiesto di sviluppare l'analisi a priori di problemi matematici assegnati, utilizzando specifici strumenti teorici;
2. ai futuri insegnanti viene richiesto di analizzare, utilizzando specifici strumenti teorici, dati provenienti da sperimentazioni didattiche, in particolare la risoluzione, da parte degli studenti coinvolti nelle sperimentazioni, dei problemi analizzati al passo 1;
3. ai futuri insegnanti viene richiesto di creare un'ipotetica discussione di classe, focalizzata sul problema analizzato al passo 1, a partire dalle risposte degli studenti analizzate al passo 2. In questa fase viene richiesto di riferirsi esplicitamente a un costrutto teorico per l'analisi del ruolo del docente durante le discussioni di classe (il costrutto M-CA_{CE}, Cusi & Malara, 2016;² Cusi, 2017);
4. le discussioni ipotetiche create al passo 3 vengono condivise e a ciascun futuro insegnante viene richiesto di realizzare una revisione tra pari di

² Il costrutto M-CA_{CE}, sviluppato a partire da ricerche realizzate nell'ambito della didattica dell'algebra come strumento di pensiero, è stato delineato con l'obiettivo di identificare i ruoli caratterizzanti il profilo di un docente che si pone come modello di ragionamento per i suoi studenti nell'uso del linguaggio matematico come strumento di pensiero, stimolando, allo stesso tempo, processi di riflessione sul piano metacognitivo (per approfondimenti, Cusi, 2017).

- almeno una discussione creata da un altro futuro insegnante;
5. il formatore orchestra una discussione collettiva con focus sui prodotti del lavoro sviluppato dai futuri insegnanti ai passi 3 e 4;
 6. durante l'ultima parte del corso di formazione, ai futuri insegnanti viene richiesto di lavorare a piccoli gruppi per progettare un'attività per le classi, sviluppandone un'analisi a priori e facendo ipotesi sulle possibili risposte degli studenti, e successivamente creare una discussione di classe ipotetica a partire dalle risposte degli studenti. Al termine di questo lavoro, il formatore può orchestrare un'ulteriore discussione per riflettere sul lavoro svolto.

Alla fine di ogni incontro e alla fine dell'intero percorso di formazione i futuri insegnanti sono invitati a scrivere e inviare al formatore una relazione, la cui stesura è guidata da una serie di domande-stimolo.

L'intero corso, a ben vedere, è caratterizzato da un approccio di tipo narrativo, evidente sia nella richiesta di stendere una relazione per ogni lezione, sia nella particolare attività di creazione di discussioni ipotetiche. In questa scelta si trae ispirazione dal lavoro di Bruner (2003), secondo cui nel momento in cui si organizzano fatti in forma narrativa si attribuiscono connessioni temporali e causali, trasformando una sequenza di eventi in un tutt'uno coerente, in cui ciascuna parte contribuisce al significato globale, e questo porta il narratore, e coloro che leggono o ascoltano una storia, a diventare consapevoli di relazioni più o meno implicite. L'approccio narrativo viene utilizzato, in forme diverse, nella formazione dei docenti di matematica (Chapman, 2005; Dettori & Morselli, 2010; Dolk & Den Hertog, 2008; Zaslavsky et al., 2003). In particolare, facciamo riferimento agli studi di Lloyd (2006) e Zazkis et al. (2009). Lloyd (2006) analizza ipotetici episodi di classe creati dai futuri insegnanti, con particolare attenzione alla struttura della lezione e al ruolo assegnato al docente. Secondo Lloyd, analizzando le storie è possibile cogliere le identità dei futuri insegnanti. Zazkis e colleghi (2009) propongono l'utilizzo del "lesson play" (copione della lezione) come strumento di formazione: i futuri insegnanti sono invitati a scrivere dialoghi fittizi tra un insegnante e i suoi allievi su un particolare argomento matematico. Sia Lloyd che Zazkis e colleghi sottolineano il valore formativo di queste tipologie di attività, poiché consentono ai futuri insegnanti di riflettere sul processo di insegnamento, sul particolare linguaggio adottato per comunicare, sui diversi tipi di ragionamento che possono emergere in una classe. Il nostro studio si situa in continuità con quelli di Lloyd e di Zazkis, Liljedahl e Sinclair per la scelta di utilizzare la creazione di storie come attività per la formazione iniziale.

La nostra metodologia è stata sperimentata nell'ambito di corsi per la formazione di futuri insegnanti di scuola primaria e secondaria nelle università di Genova, Roma-La Sapienza e Torino, attraverso una serie di cicli di progettazione-implementazione-analisi-revisione, realizzati a partire dal 2015.

In questo contributo ci concentriamo sulle riflessioni scritte prodotte dai

futuri insegnanti durante il corso e al termine di esso, allo scopo di verificare l'efficacia del percorso nel promuovere il "riscatto nei confronti della matematica".

3. Due lenti teoriche

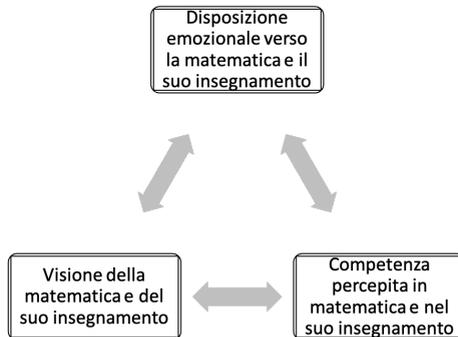
Presentiamo nel seguito le due lenti teoriche che abbiamo utilizzato per studiare l'efficacia del metodo di formazione progettato e implementato.

La prima lente teorica è il costrutto di identità, che negli ultimi anni ha guadagnato un crescente interesse tra i ricercatori (Sfard, 2009; Lutovac & Kaasila, 2018; Graven & Heyd-Metzuyanim, 2019). Facciamo riferimento alla definizione di identità di Sfard e Prusak (2005, p. 1): "*A set of reifying, significant, endorsable stories about a person*". Una storia è "reifying", o reificante, quando utilizza avverbi come "sempre", "mai", "di solito", andando così a evidenziare il fatto che si tratta di azioni ripetute. Una storia è "significant", significativa, se un cambiamento in essa influenza ciò che il narratore prova a proposito del soggetto identificato. Una storia è "endorsable", o approvata, se chi la narra la riconosce come una rappresentazione fedele. Sfard e Prusak distinguono tra storie AAA (raccontate da sé stessi, su sé stessi, a sé stessi), storie AAC (raccontate da sé, su sé stessi, a un altro destinatario), storie BAC (raccontate da un narratore, su un'altra persona, a un terzo destinatario).

La seconda lente teorica è il costrutto di atteggiamento, definito da Di Martino e Zan (2010) attraverso un modello composto da tre dimensioni interconnesse: le emozioni verso la matematica, la visione della matematica, la competenza percepita in matematica. Il modello, inizialmente teorizzato per analizzare l'atteggiamento degli studenti, è stato adattato per studiare l'atteggiamento degli insegnanti nei confronti della matematica e del suo insegnamento (Di Martino et al., 2013): alle tre componenti sopra citate si aggiungono la visione dell'insegnamento della matematica, la competenza percepita nell'insegnamento della matematica, la visione dell'insegnamento della matematica. In continuità con questa estensione, consideriamo le sei dimensioni; tuttavia, visto l'intreccio e l'influenza reciproca tra l'atteggiamento verso la matematica e l'atteggiamento verso il suo insegnamento, nel seguito, utilizziamo un modello in cui sono collocate insieme le dimensioni relative alla matematica e al suo insegnamento (Figura 1).

Figura 1

Il modello di atteggiamento verso la matematica e il suo insegnamento



Le due lenti teoriche scelte (identità e atteggiamento) sono da noi utilizzate per caratterizzare il percorso di crescita professionale dei futuri insegnanti coinvolti: da un lato, il costrutto di identità ci guida, a livello metodologico, nell'individuazione delle storie; dall'altro lato, il costrutto di atteggiamento fornisce necessari elementi aggiuntivi per analizzare lo sviluppo delle identità.

4. Contesto e metodologia di analisi

In questo contributo ci riferiamo all'implementazione della metodologia di formazione all'interno di un corso di Matematica per gli studenti del Corso di Studi in Scienze della Formazione Primaria. L'insegnamento, di 32 ore, è collocato al primo dei 5 anni di Corso di Studi. Da notare che gli studenti seguono l'insegnamento senza avere ancora fatto alcuna esperienza di tirocinio, che è previsto solo a partire dal secondo anno del Corso di Studi.

Hanno partecipato alle attività tutti gli 80 studenti frequentanti l'insegnamento. Ciascuno di essi ha consegnato 10 relazioni scritte.

Ciascuna relazione scritta è stata analizzata in termini di storia narrata dal futuro insegnante, riguardante il futuro insegnante, indirizzata al formatore (storia del tipo AAC al senso di Sfard & Prusack, 2005). Inizialmente abbiamo selezionato quelle parti di relazioni in cui il futuro insegnante parla di sé stesso (*storie significative*, nel quadro di Sfard & Prusak, 2005). All'interno delle storie significative, sono state individuate sotto-storie ricorrenti, cioè temi trattati più di una volta (storie *reificanti* per chi le narra). In particolare, sono state selezionate le sotto-storie narrate spontaneamente dal narratore, senza una richiesta diretta da parte del formatore, il che le rende storie affidabili (*storie approvate*). Le sotto-storie così selezionate sono state analizzate in termini di atteggiamento verso la matematica e il suo insegnamento, andando a interpretare le affermazioni in relazione alle diverse componenti del costrutto di atteggiamento. L'analisi dello sviluppo delle sotto-storie durante il corso ha

portato a ricostruire la storia di ciascun futuro insegnante, che può essere intesa come una storia del tipo CAD (raccontata dal formatore, riguardante il futuro insegnante, diretta ai lettori di questo articolo). È interessante rilevare che da futuro insegnante a futuro insegnante può variare il tema della sotto-storia, inteso come argomento principale su cui verte la narrazione. La ricostruzione delle storie ci ha consentito di caratterizzare l'identità di ciascun futuro insegnante in termini di dimensioni dell'atteggiamento.

In questo articolo presentiamo la ricostruzione delle storie di due future insegnanti: Ella e Zelia. Abbiamo scelto di presentare queste due storie perché, come si vedrà nel paragrafo successivo, le due future insegnanti partono da un atteggiamento verso la matematica e il suo insegnamento molto diverso e di conseguenza realizzano un percorso di crescita diverso. In entrambi i casi, però, prendere parte alle attività di formazione si rivela occasione di crescita e "riscatto".

5. Risultati dell'analisi

5.1. La storia di Zelia

Il primo tema emerso dalle sotto-storie di Zelia è "la matematica e il suo insegnamento e apprendimento". Nel seguente estratto dalla terza relazione scritta, Zelia riflette a partire dalle attività proposte durante la lezione, replicabili in una classe di scuola primaria, volte a incoraggiare gli alunni a esplicitare il proprio ragionamento. Zelia spiega che quanto visto a lezione la sta portando a riconsiderare la sua visione della matematica, fino a quel momento focalizzata sull'applicazione di regole e sul prodotto finale, considerato più importante del processo. Di conseguenza, Zelia si chiede se l'amore per la matematica che ha sempre provato nei suoi anni da studentessa non sia in realtà da intendersi come una semplice infatuazione, legata a una visione incompleta della disciplina:

Io non odio la matematica, anzi è stata una materia che si è rivelata molto piacevole negli anni. Ma credo che questo laboratorio mi stia facendo sorgere il dubbio di non averla mai amata davvero (...). Mi domando se la matematica che ho pensato di amare al liceo sia esattamente ciò che è la matematica o se ho amato semplicemente il riuscire a svolgere degli esercizi, semplicemente possedendo le regole. (Zelia, 3° relazione)

Nella quarta relazione troviamo un'altra riflessione legata al superamento di una visione procedurale della matematica. Zelia, a partire da un episodio di classe analizzato a lezione, riflette sul ruolo del docente e ripensa al tipo di insegnamento vissuto quando era studentessa. Questo la porta nuovamente a interrogarsi sulla propria visione della matematica.

Ricordo che la professoressa del triennio delle superiori era solita introdurre gli argomenti in due modi: o spiegandoli, insomma partendo dalla teoria, o formulando una sorta di problema, a cui non si lavorava in gruppo ma a cui lavorava lei alla

lavagna chiedendoci delle intuizioni su come risolverlo. Io ricordo che tra i due modelli preferivo nettamente il primo e questo mi fa chiedere se il limite fosse mio o della docente. Mi domando se fosse il suo modo di prospettare il problema ad essere inefficace, o se fossi io in realtà a non essere in grado di sviluppare delle competenze al riguardo, limitandomi solo ad essere una brava esecutrice. Tra le cose che più sto cercando di scoprire sul lato metacognitivo in questo laboratorio c'è proprio il capire se la mia visione della matematica, coperta da un velo di positività non sia in realtà solo una visione della matematica come formule da applicare. (Zelia, 4° relazione)

Nella quarta relazione si trova anche il racconto di uno scambio di opinioni con un altro futuro insegnante partecipante al Corso. L'argomento è ancora una volta la visione della matematica.

Alcuni giorni fa parlavo con una ragazza dell'università che diceva che a suo parere non è vero che la matematica apra la mente. Io le ho risposto che secondo me la matematica può aiutare molto nel ragionamento, nella capacità di comprensione. Riporto l'episodio perché è da qui che mi domando, in un ulteriore scavo interiore, se io stessa non parli in realtà per un pregiudizio semplicemente di senso opposto (...), cioè se io in realtà non mi sia convinta di credere in una matematica in grado di aprire la mente, per puro presupposto, continuando nel frattempo a usare la matematica in modo meccanico. (Zelia, 4° relazione)

Dopo la sesta lezione, Zelia riflette sul suo modo di affrontare la risoluzione di problemi (basato principalmente sul ricorso al linguaggio simbolico) e riconosce di provare difficoltà nel concepire altre strategie risolutive. Zelia attribuisce questa difficoltà ad una visione limitata della matematica.

Il fatto di non riuscire a trovare altre strategie mi fa riflettere sui modi di approcciarsi alla matematica e alla paura che la risposta non sia mai abbastanza matematica. (...) Credo che il fatto che tutti questi passaggi non siano verbalizzati possa dipendere da due aspetti: o essi sono ormai diventati degli automatismi (il che si rivela un problema se non permettono di elaborare anche altre strategie); o ci si limita sempre ad una visione della matematica che si esaurisce nel prodotto, nel risultato, come se tutto il processo potesse non avere alcun significato. Questa considerazione mi porta cioè a vedere come a volte certi modi di procedere siano in noi radicati e quanto sia necessaria una continua riflessione. (Zelia, 6° relazione)

Facendo riferimento al modello dell'atteggiamento, possiamo dire che il corso ha promosso in Zelia una riflessione sul suo atteggiamento verso la matematica e il suo insegnamento: fin dall'inizio, Zelia riporta una disposizione emozionale positiva nei confronti della matematica, ma nel corso delle lezioni Zelia inizia a mettere in discussione la sua visione della matematica. Quando, grazie al confronto con gli altri futuri insegnanti sulle attività affrontate durante il corso, ha l'opportunità di riflettere sui limiti del suo approccio alla disciplina, Zelia reagisce dichiarandosi motivata a lavorare su di sé per sviluppare una più elaborata visione della Matematica.

Possiamo notare che Zelia non solo riflette sul suo passato di studentessa,

desiderosa di migliorare la sua visione della matematica; Zelia è anche consapevole del fatto che la visione della matematica potrebbe influenzare la sua futura pratica come insegnante. Questo porta al secondo tema, denominato “ruoli dell’insegnante di matematica”. Il primo estratto si riferisce alla seconda lezione, che ha portato Zelia a riflettere sulla sua insegnante-modello e a confrontarla con altri tipi di insegnanti, definiti “docenti pigri”, che possono invece essere causa di esperienze di fallimento in matematica:

Egli è tra i modelli di insegnante (...) a cui oggi guardo quando penso a me come futura maestra, e a livello più profondo tra chi forse inconsciamente ha instillato in me il desiderio di insegnare e di poter essere per altri allievi ciò che questi sono stati per me. A livello speculare, nei racconti altrui, credo di aver visto come un insegnante svogliato, pigro, etichettatore possa essere una concausa del fallimento dell’allievo, aspetto non troppo lontano neppure dalla mia esperienza se guardo gli anni del primo ciclo della mia istruzione. (Zelia, 2° relazione)

Nella sua quinta relazione, Zelia riferisce che l’attività di analisi di episodi di classe le ha permesso di prendere coscienza dell’importanza di una gestione flessibile delle discussioni in classe, e della necessità di un’accurata progettazione di ogni lezione:

La cosa che soprattutto mi ha colpito è stata la prontezza dell’insegnante nel creare una metafora così iconicamente efficace e proprio questo mi fa domandare in che modo l’insegnante si sia preparata per quella lezione. Mi chiedo se l’insegnante si era presa del tempo per elaborarla ipotizzando già quali difficoltà potessero avere gli alunni o se tale metafora non le fosse già nota e la sua capacità sia stata quella di ricordarla e utilizzarla proprio nel momento più opportuno. (Zelia, 5° relazione)

Riflettendo sulla sessione 8, dedicata alla presentazione del costrutto teorico M-CA_{CE}, volto a caratterizzare i ruoli svolti dall’insegnante durante le discussioni in classe (Cusi & Malara, 2016), Zelia si rende conto che alcuni di questi ruoli sono fondamentali per promuovere negli alunni il superamento di una visione “statica” della matematica:

Nel ruolo di attivatore di atteggiamenti riflessivi si evidenzia l’importanza di lavorare con la classe in plenaria poiché è dallo scontro/incontro di diversi pensieri, approcci e strategie che si può cogliere la ricchezza del pensiero e uscire dall’immagine tradizionale e statica della matematica secondo la quale per ogni problema esiste una ed un’unica soluzione e vi è solo un modo di raggiungerla. (Zelia, 8° relazione)

In riferimento al secondo tema (“ruoli dell’insegnante di matematica”), Zelia si rende conto che l’insegnante ha un ruolo fondamentale nel formare/migliorare l’atteggiamento degli studenti nei confronti della matematica (2° relazione, riferimento alle esperienze di fallimento delle sue compagne). Successivamente, Zelia riconosce l’importanza di ruoli specifici riguardanti la pianificazione e la gestione delle attività di classe, arricchendo così le tre componenti del suo atteggiamento nei confronti della matematica e del suo insegnamento in termini

di visione (riconosce il valore di ruoli specifici come la pianificazione, la gestione delle discussioni), disposizione emozionale (è positivamente colpita dall'episodio di classe analizzato a lezione) e competenza percepita (si rende conto che la discussione in classe può aiutarla a proporre agli studenti una lezione significativa e “non statica”, come desiderava).

5.2. *La storia di Elia*

La seconda storia riguarda la futura insegnante Ella. Il primo tema emerso dall'analisi delle sotto-storie di Ella riguarda “la matematica e il suo apprendimento”. Nella relazione relativa alla seconda lezione (in cui a Ella e ai suoi compagni è stato proposto un compito di congettura e dimostrazione), Ella riconosce di non aver mai sperimentato attività matematiche di questo tipo quando era studentessa, e riflette sul fatto che questa mancanza può averle fatto sviluppare una visione limitata della matematica, basata su procedure piuttosto che su argomentazioni e ragionamenti. Inoltre, Ella riferisce di provare una disposizione emozionale negativa nei confronti della matematica (con particolare riferimento all'algebra), unita a una costante paura di sbagliare.

Il mio approccio alla matematica, nella mia esperienza di studente, mi ha portato a sottovalutare le finalità dell'apprendimento; a interiorizzare concetti isolati; peggio ancora, ad elaborare soluzioni meccaniche e immediate, spesso prive di argomentazioni consapevoli. (...) La paura di sbagliare (...) La sensazione di intrattenere con questa materia una relazione pericolosa: sempre in bilico tra il desiderio di spingermi oltre e la sensazione di cadere, di inciampare nel calcolo sbagliato e nei miei limiti. (Ella, 2° relazione)

Durante il corso, Ella riflette sugli esempi proposti di attività didattiche e riconosce che tali attività stanno migliorando la sua visione della matematica.

Non avevo mai pensato alla grande potenzialità offerta da questa prospettiva. Lavorare alla costruzione del nostro pensiero matematico, fin dalla scuola primaria. Imparare a ‘parlare la matematica’. Esperire la MATEMATICA come LINGUAGGIO. (Ella, 6° relazione)

Nella relazione finale, Ella riconosce qualche miglioramento nel suo atteggiamento nei confronti della matematica, con riferimento alla visione della disciplina. Parla di nuovo degli errori, ma si mostra disposta ad accettare gli errori come una parte inevitabile dell'attività matematica intesa come processo.

Io mi porto dietro il mio passato di studentessa insicura e impaurita (...). Ho imparato a detestare la matematica, prima ancora di guardarla in faccia. Sono diventata abile a nascondermi dietro un esercizio, ad aggirare le domande, a ripetere operazioni minime rifuggendo dalla visione d'insieme e dalla ricerca di senso. Per questo motivo, la più grande difficoltà che ho incontrato in questo percorso è individuabile nel tentativo di DIVENTARE PROTAGONISTA (...). Porre domande che non avevo mai avuto il coraggio di condividere. (...) Sbagliare, soprattutto. Imparare a sbagliare. Desiderare e concedersi di sbagliare. Perché nella

mia non-esperienza di allieva timida e insicura, l'errore non era ammesso. (Ella, relazione finale).

Facendo riferimento al modello tridimensionale dell'atteggiamento, possiamo dire che, grazie al corso, Ella è passata da un atteggiamento nei confronti della matematica caratterizzato da una disposizione emozionale negativa (paura, pericolo) e da una visione limitata della disciplina (procedure meccaniche, enfasi sul prodotto finale, che deve essere privo di errori) a una più positiva, caratterizzata da una nuova disposizione emozionale (associata all'assenza di paura nel fare domande e nello sbagliare) e da una nuova e più ricca visione della disciplina (la matematica come linguaggio), caratterizzata da una costante ricerca di senso.

Il secondo tema fa riferimento ai “ruoli dell'insegnante di matematica”. Dopo la sessione 2, Ella riflette sull'attività proposta (esplorazione di situazioni, sviluppo di congetture e dimostrazione) e sul ruolo cruciale dell'insegnante-formatore nella discussione collettiva sul compito. In particolare, Ella indica un nuovo modo di concepire gli errori come risorse per l'insegnante:

Ho particolarmente apprezzato la capacità dell'insegnante [formatore] di guidare il ragionamento del gruppo senza interferenze e giudizi, considerando gli errori come risorse del ragionamento in costruzione. (Ella, 2° relazione)

Dopo la sessione 3, Ella riflette sul fatto che l'insegnante deve essere flessibile e adattare il piano della lezione agli interventi degli studenti. Ella si dichiara desiderosa di imparare a gestire le discussioni in classe in modo fruttuoso.

Mi sembra che, in questo senso, l'arte dell'insegnante si avvicini proprio a quella del maestro artigiano. E mi piacerebbe sperimentare in prima persona non solo le modalità di fruizione di un'attività laboratoriale; ma anche possibili tecniche di progettazione e presentazione alla classe. (Ella, 3° relazione)

La 6° relazione scritta, in cui Ella riflette su una sessione incentrata sull'analisi delle attività in classe, contiene un'interessante riflessione sul ruolo dell'insegnante che pone domande agli alunni, ma anche a sé stesso.

Ciò che mi colpisce (...) è l'apprendimento interattivo e il clima cooperativo che l'insegnante riesce a stimolare attraverso l'acquisizione dei suoi ruoli di GUIDA RIFLESSIVA e ATTIVATORE DI PROCESSI INTERPRETATIVI. Imparano i bambini: a confrontarsi nel gruppo dei pari, ad argomentare i propri ragionamenti e strategie, a cambiare idea o a includere una nuova prospettiva nella sfera delle possibili soluzioni alternative. Impara il docente: equilibrista alla ricerca delle domande da porre e da porsi, portatore sano di un'idea di insegnamento trasparente, che all'imposizione di soluzioni univoche sostituisce l'interrogativo, la ricerca e il pensiero come nutrimento dell'individuo e della comunità. (Ella, 6° relazione)

In riferimento al secondo tema (“ruoli dell'insegnante di matematica”), possiamo trovare nelle relazioni di Ella esempi di un atteggiamento positivo nei confronti dell'insegnamento della matematica. Durante il corso, la visione dell'insegnamento della matematica si arricchisce sempre di più, con

riferimento ai ruoli cruciali dell'insegnante nel gestire le discussioni in classe, guidare il ragionamento degli studenti senza imporre una strategia, utilizzare gli errori come risorse. Ella esprime anche una disposizione emozionale positiva verso il suo ruolo futuro e si dichiara pronta ad imparare e sperimentare come pianificare e realizzare attività significative in classe. Questa buona volontà e questo ottimismo riguardo al suo futuro come insegnante possono essere interpretati in termini di buona competenza percepita.

6. Discussione e conclusioni

In questo contributo abbiamo illustrato una metodologia per la formazione iniziale degli insegnanti di matematica e ne abbiamo discusso l'efficacia con particolare attenzione ai fattori affettivi. Abbiamo adottato una doppia lente teorica (identità e atteggiamento) per analizzare le relazioni scritte da due future insegnanti (Zelia ed Ella) durante tutto il corso. Le due storie riportate, e il loro oscillare tra passato e futuro, mostrano lo sviluppo delle loro identità di future insegnanti. Le storie di Zelia ed Ella rivelano differenze nel rapporto con il passato: Zelia ha sempre avuto una disposizione emozionale positiva nei confronti della matematica, mentre Ella riporta di aver sempre provato una disposizione emozionale negativa. Zelia riflette su un esempio positivo di insegnante che ha vissuto, mentre Ella riporta le proprie difficoltà nell'apprendimento della matematica. In discontinuità con il passato, l'analisi dei dati mostra l'evoluzione dell'atteggiamento delle future insegnanti nei confronti della matematica e del suo insegnamento, soprattutto in termini di arricchimento della visione della matematica. Per quanto riguarda il futuro, entrambe mostrano una crescente consapevolezza e apprezzamento per i ruoli che dovranno ricoprire come insegnanti. È interessante notare che la riflessione sui ruoli degli insegnanti, promossa durante il corso attraverso lo studio dei processi di insegnamento con le lenti offerte da un costrutto teorico, risulta efficace nel promuovere un collegamento tra passato e futuro: Zelia riconosce che, interpretando tali ruoli, sarà in grado di agire come l'insegnante-modello che aveva quando era una studentessa; Ella pensa che assumendo tali ruoli come insegnante sarà in grado di aiutare i suoi studenti ad apprendere in un modo migliore rispetto alla sua esperienza di studentessa. Tale crescita di consapevolezza si lega ad una proiezione verso il futuro del lavoro di insegnanti e si svolge, per entrambe, nonostante i punti di partenza così diversi all'inizio del corso, in continuità con l'esigenza di "riscatto nei confronti della matematica".

Un possibile limite del nostro studio riguarda il fatto che i futuri insegnanti scrivono le loro relazioni su richiesta del ricercatore, che è anche il loro formatore. Questo può generare meccanismi di desiderabilità sociale (Zammuner, 1998) e contratto didattico (Brousseau, 1986). Per questo, integreremo lo studio delle relazioni finali con un'analisi fine dei processi messi

in atto durante le diverse attività di formazione proposte, in modo da triangolare le informazioni che vengono dalle dichiarazioni degli insegnanti in formazione con dati relativi alle attività svolte.

L'analisi delle storie dei futuri insegnanti ci ha permesso di identificare quegli elementi della metodologia di formazione che sono risultati particolarmente efficaci nel promuovere lo sviluppo di un migliore atteggiamento nei confronti della matematica e del suo insegnamento. Intendiamo proseguire il nostro studio andando ad analizzare in modo fine le riflessioni promosse in ciascuna delle attività proposte durante il corso, per cercare anche di capire se certe attività sono più o meno efficaci in relazione a determinati atteggiamenti verso la matematica e il suo insegnamento.

I dati analizzati finora hanno mostrato che dare l'opportunità di vivere in prima persona esperienze matematiche significative favorisce il miglioramento della competenza percepita in matematica, promuove una disposizione emozionale positiva e veicola una visione della matematica e del suo insegnamento dinamica e lontana da quella procedurale. Questo risultato è in sintonia con quelli emersi dalle ricerche di Rouleau et al. (2019), che riguardano la formazione in servizio. Fornire strumenti teorici che sostengano l'analisi di processi di insegnamento-apprendimento, ma anche la loro progettazione e implementazione, favorisce il miglioramento della competenza percepita nei confronti dell'insegnamento. Far creare discussioni ipotetiche favorisce la riflessione e presa di consapevolezza, quindi può avere effetti positivi sulle tre dimensioni. Anche le relazioni si sono rivelate efficaci, perché hanno permesso di creare uno spazio libero per riflettere sul corso (il presente) e collegarlo con le loro esperienze di studenti (il loro passato) e il loro prossimo ruolo di insegnanti (il loro futuro).

Riferimenti bibliografici

- Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Bruner, J. (2003). *Making stories*. Harvard University Press.
- Chapman, O. (2005). Stories of practice: A tool in preservice secondary teacher education. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *Proceedings of the 15th ICMI Study 'The professional education and development of teachers of mathematics'*. <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8>
- Cusi, A. (2017). Il ruolo dell'insegnante nell'ambito di una didattica dell'algebra come strumento per ragionare: lenti teoriche per l'analisi. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 40 A-B(2), 157–180.
- Cusi, A., & Malara, N. A. (2016). The intertwining of theory and practice: Influences on ways of teaching and teachers' education. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education 3rd Edition* (504–522). Taylor & Francis.

- Cusi, A., & Morselli, F. (2018). Linking theory and practice: Prospective teachers creating fictional classroom discussions. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of PME 42* (Vol. 2, pp. 323–330). PME.
- Cusi, A., & Morselli, F. (2022). Between past and future: Stories of pre-service mathematics teachers' professional development. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 195–202). PME.
- Dettori, G., & Morselli, F. (2010). Eliciting beliefs with a narrative activity in mathematics teacher education. In F. Furinghetti & F. Morselli (Eds.), *Proceedings of the Conference MAVI 15: Ongoing research on beliefs in mathematics education* (pp. 89–100).
- Di Martino, P., Coppola, C., Mollo, M., Pacelli, T., & Sabena, C. (2013). Pre-service primary teachers' emotions: The math-redemption phenomenon. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of PME 37* (Vol. 2, pp. 225–232). PME.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teachers Education*, 13(1), 27–48. <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z>
- Dolk, M., & Den Hertog, J. (2008). Narratives in teacher education. *Interactive Learning Environments*, 16(3), pp. 215–229. <https://doi.org/10.1080/10494820802113970>.
- Graven, M., & Heyd-Metzuyanim, E. (2019). Mathematics identity research: The state of the art and future directions: Review and introduction to ZDM Special Issue on Identity in Mathematics Education. *ZDM-Mathematics Education: The international journal on mathematics education*, 51(3), 361–377. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01050-y>
- Hannula, M. S., Leder, G. C., Morselli, F., Vollstedt, M., & Zhang, Q. (Eds.). (2019). *Affect and mathematics education: Fresh perspectives on motivation, engagement, and identity*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-13761-8>
- Hodgen, J., & Askew, M. (2011). Emotion, identity and teacher learning: Becoming a primary mathematics teacher. In C. Day & J. C. K. Lee (Eds.), *New understandings of Teacher's Work: Emotions and Educational Change* (pp. 165–183). Springer.
- Jaworski, B. (2004). Grappling with complexity: Co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 17–36). PME.
- Lloyd, G. M. (2006). Preservice teachers' stories of mathematics classrooms: Explorations of practice through fictional accounts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(1), 57–87. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9004-2>
- Lutovac, S., & Kaasila, R. (2018). Future directions in research on mathematics-related teacher identity. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(4), 759–776. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9796-4>
- Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 31–55). Sense Publishers.

- Morselli, F., & Sabena, C. (2015). “Let's play! Let's try with numbers!”. Pre-service teachers' affective pathways in problem solving. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-9)* (pp. 1231–1237). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
- Panero, M., Di Martino, P., Castelli, L., & Sbaragli, S. (2020). L'evoluzione degli atteggiamenti verso la matematica e il suo insegnamento degli insegnanti di scuola elementare in formazione iniziale. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, (8), 48–77. <https://doi.org/10.33683/ddm.20.8.3>
- Rouleau, A., Ruiz, N., Reyes, C., & Liljedahl, P. (2019). First-person vicarious experiences as a mechanism for belief change. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-11)* (pp. 1517–1524). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34(4), 14–22. <https://doi.org/10.3102/0013189X034004014>
- Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico*. Erickson.
- Zammuner, V. L. (1998). *Tecniche dell'intervista e del questionario*. Il Mulino.
- Zaslavsky, O., Chapman, O., & Leikin, R. (2003). Professional development in mathematics education: Trends and tasks. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877–917). Kluwer.
- Zazkis, R., Liljedahl, P., & Sinclair, N. (2009). Lesson plays: Planning teaching versus teaching planning. *For the Learning of Mathematics*, 29(1), 40–47.

Apprendere la matematica durante la pandemia: effetti su emozioni e autoefficacia di studenti universitari

Learning mathematics during the pandemic: effects on university students' emotions and sense of self-efficacy

Aprender matemática durante la pandemia: efectos sobre las emociones y la autoeficacia de los estudiantes universitarios

Chiara Andrà, Andrea Amico e Matteo Pezzutto

*Dipartimento per lo Sviluppo Sostenibile e la Transizione Ecologica,
Università del Piemonte Orientale, Italia.*

Sunto. *Nel presente articolo si analizzano le emozioni ed il senso di autoefficacia, durante un corso di matematica, di un gruppo di studenti universitari al primo anno della laurea triennale in Scienze dei Materiali. I dati raccolti riguardano le narrazioni, espresse anche sotto forma di grafico, che gli studenti esplicitano rispetto alla disposizione emotiva e al senso di auto-efficacia percepite nel corso del primo semestre, che è stato interessato anche da 3 settimane di didattica a distanza a causa della pandemia da Covid-19. Emergono relazioni interessanti tra l'atteggiamento verso la matematica, analizzata nel tempo, e il successo all'esame finale.*

Parole chiave: studi universitari, STEM, disposizione emotiva, autoefficacia, grafici.

Abstract. *This article analyzes the emotions and the sense of self-efficacy, during a mathematics course, of a group of university students in the first year of the three-year degree in Materials Science. The data collected concerns the narratives, also expressed in the form of graphs, that the students express with respect to the emotional disposition and sense of self-efficacy perceived during the first semester, which was also affected by 3 weeks of distance learning due to the Covid-19 pandemic. Interesting relationships emerge between attitudes towards mathematics, analyzed over time, and success in the final exam.*

Keywords: undergraduate studies, STEM, emotional disposition, self-efficacy, graphs.

Resumen. *En este trabajo se analizan las emociones y el sentido de autoeficacia de un grupo de estudiantes de primer año de la carrera en Ciencia de los Materiales durante un curso de matemática. Los datos recogidos se refieren a las narraciones, también expresadas en forma de gráfico, que los estudiantes manifiestan en relación con la disposición emocional y el sentido de autoeficacia percibidos durante el primer semestre, que además se vio afectado por 3 semanas de enseñanza a distancia debido*

a la pandemia de Covid-19. Surgen relaciones interesantes entre la actitud hacia las matemáticas, analizada a lo largo del tiempo, y el resultado en el examen final.

Palabras clave: estudios universitarios, STEM, disposición emocional, autoeficacia, gráficos.

1. Introduzione

Negli ultimi 3 anni abbiamo tutti sperimentato il lavoro a distanza. Ciò ci ha permesso di scoprire nuovi modi di agire e di lavorare, permettendo continuità in un periodo difficile da affrontare. Dal punto di vista didattico, però, le sfide non sono state poche a tutti i livelli scolari: i ragazzi costretti a studiare e a seguire le lezioni da casa hanno riscontrato numerosi problemi sull'apprendere i nuovi concetti che venivano spiegati dai professori. Dreyfus (1991) afferma che la matematica deve essere appresa attraverso tentativi, errori e anche disegni che cercano di presentare visivamente parti delle strutture matematiche (come grafici, funzioni, ...). Come si può immaginare, attraverso uno schermo di un computer, il tipo di interazione che sarebbe servita per apprendere la materia non risulta efficace. In particolare, quel riscontro immediato, possibile soltanto in una interazione studente-insegnante in un'aula fisica, è mancato, con ripercussioni sull'apprendimento. Le ricerche condotte da INVALSI (Falzetti, 2021) hanno mostrato che, dopo mesi di apprendimento a distanza, gli studenti non hanno mostrato carenze per quanto riguarda le conoscenze apprese, bensì sul senso di competenza, e una nostra ipotesi ulteriore è che essi si sentano limitati dal non sentirsi in grado di affrontare determinate situazioni e argomenti, perché si è perso quel tipo di interazione, descritta da Liljedahl (2014), che permette ad uno studente di acquisire fiducia in se stesso attraverso la fiducia che l'insegnante pone in lui nelle interazioni in aula durante attività di problem solving. L'importanza della sfera affettiva può essere riassunta come segue: "Le emozioni esercitano moltissimi effetti sul nostro apparato cognitivo, e uno dei loro ruoli è quello di stabilire gli obiettivi che vogliamo raggiungere" (Varani, 2000, p. 2). Tuttavia, "passioni, sentimenti, affetti, emozioni, termini non facilmente definibili e la cui differenza è spesso sfumata, sono certamente un argomento complesso sul quale, nello spazio di un articolo, si possono dare solo alcuni elementi di stimolo e di suggestione" (Varani, 2000, p. 1). Nel suo articolo, Varani (2000) sostiene la complessità della mente e delle emozioni come "(...) una rete di significati e di schemi in cui ogni concetto ha una colorazione emotiva più o meno forte e diversa" (p. 3) Nel nostro lavoro, attraverso una metodologia denominata graphing affect, vogliamo cogliere l'evoluzione delle disposizioni emotive degli studenti verso la matematica, e l'intreccio tra queste e il senso di auto-efficacia percepita nel corso del primo semestre all'università, con riferimento al corso di matematica.

2. Inquadramento teorico

Gli aspetti affettivi correlati alla matematica, al suo processo di apprendimento e di insegnamento, sono oggetto di ricerca in didattica della matematica a partire dagli anni '90, quando alcuni studi pionieristici iniziarono ad indagare costrutti come l'ansia in matematica (Zan et al., 2006). Tradizionalmente, gli aspetti affettivi, che includono le credenze, gli atteggiamenti, le motivazioni, le emozioni, sono stati intesi come sottoprodotti delle attività cognitive, di apprendimento/insegnamento in matematica. In generale, aspetti affettivi come le emozioni sono stati tradizionalmente intesi come una reazione all'interpretazione di un'esperienza (Mandler, 1984). Per queste ragioni, è stato riconosciuto il ruolo che gli aspetti affettivi hanno nell'influenzare l'apprendimento in generale (Zan et al., 2006) e l'elaborazione cognitiva in particolare (Hannula, 2002).

Da quella che Liljedahl (2014) chiama una prospettiva di ricerca "acquisizionista" sugli aspetti affettivi correlati all'apprendimento e all'insegnamento della matematica, il ruolo di questi è inteso proprio come un sottoprodotto del processo di apprendimento e non come parte determinante, a priori, di esso. Tuttavia, tale punto di vista non riesce, secondo Liljedahl (2014), a rispondere alla domanda su quali meccanismi leghino credenze, atteggiamenti, motivazioni ed emozioni al comportamento, alle azioni e, quindi, all'apprendimento. Per rispondere a questa domanda, suggeriamo di passare ad una visione vygotskiana, o "partecipativa" (Liljedahl, 2014) della ricerca sugli aspetti affettivi, che richiamiamo brevemente in quanto segue.

La Cultural Historical Activity Theory (CHAT), elaborata inizialmente da Leont'ev (1978), sostiene che ogni attività umana, compresa la matematica, la risoluzione di problemi, ecc., abbia un obiettivo. Ogni obiettivo diventa per l'azione umana un motivo, per agire in un modo o in un altro. Quindi, i motivi guidano le azioni umane. Le motivazioni possono essere consce o inconsce e servono allo scopo di soddisfare i nostri bisogni (Leont'ev, 1978). Le emozioni, in questa prospettiva, fungono da segnale interno nella relazione tra le nostre motivazioni e le azioni che lavorano per soddisfarle, fornendoci un senso di probabilità di successo rispetto alle azioni intraprese per raggiungere l'obiettivo che ci siamo preposti. Cioè, nonostante il fatto che le motivazioni possano essere sconosciute a un individuo, l'emozione segnala se il successo possa essere raggiunto. Inoltre, le emozioni compaiono prima di qualsiasi valutazione razionale, da parte del soggetto, della sua attività (Leont'ev, 1978). È come se l'individuo si trovasse ad agire in un certo modo (o a rifiutarsi di agire), a seconda del modo in cui le sue emozioni forniscono un senso di probabilità di riuscire nelle sue azioni (o no).

Come osserva anche Radford (2015), il cambio di prospettiva, da "acquisizionista" a "partecipativo", comporta per il ricercatore un salto radicale dal considerare gli aspetti affettivi come esperienze interiori, soggettive e fisiologiche, solitamente di natura irrazionale, al considerarli come socialmente

e storicamente costituite. All'interno del campo di ricerca sugli aspetti affettivi, inoltre, Di Martino e Zan (2011) osservano che uno degli aspetti più critici, ancora da chiarire, è il rapporto tra credenze ed emozioni, rapporto problematico che richiama il problema della natura dell'interazione tra aspetti cognitivi ed emotivi nelle attività di apprendimento e insegnamento della matematica (Zan et al., 2006). Questo è un punto cruciale, perché aspetti emotivi e cognitivi interagiscono profondamente, e sono quindi fattori importanti, nei processi di apprendimento della matematica. Il costrutto degli atteggiamenti verso la matematica, che è il focus principale della nostra ricerca, soprattutto per quanto concerne la disposizione emotiva ed il senso di autoefficacia, si trova in qualche modo "a metà strada" tra emozione e credenza (McLeod, 1992). Di Martino e Zan (2011) ricordano che tale costrutto è identificato, nell'ambito della psicologia sociale, come un orientamento a comportarsi in un certo modo, sottolineando esplicitamente lo stretto legame tra atteggiamento e comportamento, e in particolare tra atteggiamento e possibilità di fare previsioni sul comportamento. Tuttavia, a tal proposito, Di Martino e Zan (2011) suggeriscono di passare da un approccio normativo (che mira a spiegare le cause del comportamento, consentendo di predire il comportamento), ad uno interpretativo, nel quale gli aspetti affettivi possono essere utilizzati per descrivere l'interazione tra essi e l'apprendimento, consentendo di comprendere i motivi delle azioni intenzionali. In questa direzione, Di Martino e Zan (2011) hanno elaborato un modello tripartito per gli atteggiamenti verso la matematica: "(i) la disposizione emotiva verso la matematica, espressa in modo conciso con 'mi piace/non mi piace la matematica'; (ii) la percezione di essere/non essere in grado di avere successo in matematica, quella che spesso viene chiamata competenza percepita (Pajares & Miller, 1994), espressa sinteticamente con: 'Sono capace/Non sono capace'; (iii) la visione della matematica, sinteticamente espressa con 'la matematica è...'" (Di Martino & Zan, 2011, p. 6). In questo lavoro, utilizziamo le prime due parti del modello. I due ricercatori italiani riportano, nei loro studi, uno stretto rapporto tra disposizione emotiva negativa nei confronti della matematica ('non mi piace') e bassa competenza percepita ('non sono capace'). Come osservano i ricercatori per il modello degli atteggiamenti, anche privato della dimensione della visione della matematica, "affinché diventi uno strumento teorico e didattico efficace, è necessaria la costruzione e l'utilizzo di strumenti di osservazione coerenti, capaci di tener conto della sua complessità" (Di Martino & Zan, 2011, p. 10). Pertanto, introduciamo nella sezione successiva lo strumento metodologico da noi adottato per indagare l'evoluzione degli atteggiamenti verso la matematica nello studio da noi condotto.

3. Metodologia

3.1. *Il metodo del 'graphing affect' per la raccolta dei dati*

Esistono diversi metodi per raccogliere dati relativi agli elementi affettivi degli studenti nei processi di apprendimento della matematica: ad esempio, misure quantitative basate su questionari a risposta chiusa (Beswick, 2006; Fennema & Sherman, 1976; Richardson & Suinn, 1972), misure qualitative che utilizzano l'osservazione (Ingram, 2007; Walter & Hart, 2009), interviste (Hannula, 2002; McDonough & Sullivan, 2014; Op't Eynde et al., 2006), oppure diari autobiografici (Di Martino & Zan, 2011; Liljedahl, 2014). Tutti questi approcci presuppongono che gli studenti possano riconoscere e/o articolare verbalmente i propri sentimenti, sia in risposta a scelte prescritte (sondaggi), sia in risposte aperte (interviste, diari). Tuttavia, non tutti gli aspetti relativi alle credenze, agli atteggiamenti o alle emozioni sono consapevolmente accessibili, quindi i metodi che si basano esclusivamente sulla verbalizzazione possono creare sfide metodologiche. Tracciare grafici per rappresentare le proprie esperienze affettive offre un'alternativa che si affida meno alle parole, pur non eliminandole del tutto. Quando gli studenti rappresentano graficamente alcuni aspetti del loro vissuto affettivo (ad esempio, Anderson, 2005; Ingram, 2011; McLeod et al., 1990; Smith & Star, 2007), possono descriverlo o collocarlo su assi cartesiani che rappresentano il tempo (asse x) e l'intensità (asse y). Se il grafico, che rappresenta l'andamento di un aspetto affettivo nel tempo in termini di intensità, viene seguito da una descrizione verbale, il ricercatore può accedere alle esperienze affettive dello studente attraverso due registri comunicativi: quello grafico e quello verbale.

Nello studio da noi condotto, abbiamo chiesto agli studenti di pensare a quanto la matematica affrontata in un corso universitario fosse piaciuta (disposizione emotiva, nel modello di Di Martino & Zan, 2011) e quanto avessero creduto di essere pronti per superare l'esame (competenza percepita), nel tempo trascorso dall'inizio del corso all'ultima lezione, durante la quale l'indagine è stata condotta.

3.2. *I partecipanti allo studio e il metodo di analisi dei dati*

Un gruppo di 7 studenti frequentanti il corso di Matematiche I e II, al I anno della Laurea Triennale in Scienze dei Materiali dell'Università del Piemonte Orientale, ha partecipato allo studio, su base volontaria. Il gruppo è composto da due studentesse e cinque studenti e rappresenta il 60% del campione degli studenti del corso. L'indagine è stata svolta alla fine del I semestre dell'anno accademico 2020/21, durante il quale il Piemonte è diventato "zona rossa", nella gestione dell'emergenza da pandemia da Covid-19, per tre settimane nel mese di novembre (il corso era iniziato da 6 settimane e, dopo le 3 di DAD, è proseguito per altre 3 settimane). Le lezioni di matematica si sono svolte in presenza in classe, ad eccezione delle tre settimane in "zona rossa", durante le

quali è stato attivato un collegamento online per seguire a distanza. La metodologia didattica è stata per lo più la stessa, in DAD ed in presenza: lezioni frontali con brevi momenti di lavoro a gruppi su esercizi.

Nel corso dell'ultima lezione, in presenza e a dicembre 2020, la docente del corso ha disegnato alla lavagna una retta orizzontale, orientata verso destra, indicante il tempo. Su tale retta, ha indicato un punto che marcava l'inizio del corso e un secondo punto che denotava la sua fine. Ha, poi, disegnato l'asse verticale in modo che il punto di inizio corso non coincidesse con l'origine degli assi cartesiani e ha assegnato questo compito: "disegnate, con un colore, una linea che indichi quanto vi sia piaciuto questo corso, dal suo inizio ad ora; con un altro colore, disegnate una seconda linea che rappresenti quanto vi siete sentiti capaci di superare l'esame durante il corso. Descrivetemi il grafico che avete disegnato, scrivendo le motivazioni per le quali avete fatto le vostre scelte, nello spazio del foglio sotto al grafico". Gli elaborati sono stati consegnati alla docente e non sono stati commentati in aula.

Le 7 consegne sono state, quindi, analizzate in rapporto al modello proposto da Di Martino e Zan (2011), escludendo la visione della matematica, per esaminare la percezione, al termine del corso, di quello che è stato l'andamento nel tempo della competenza percepita e della disposizione emotiva, separatamente prima e congiuntamente poi, per ciascuno studente. Si tratta, infatti, di una ricostruzione che viene fatta a posteriori. Si sono andate a cercare, infine, possibili relazioni con il superamento dell'esame (in termini di voto conseguito).

4. Analisi dei dati

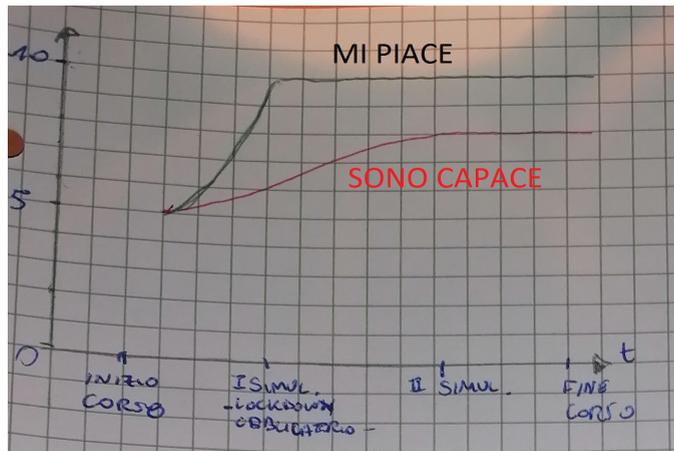
I grafici presenti nello studio mostrano andamenti articolati, caratterizzati da ascese o discese in funzione di momenti precisi, individuati sull'asse temporale. Precisiamo che gli studenti fanno riferimento, quando costruiscono i grafici, a momenti precisi del corso (ad esempio, I e II simulazione; oppure inizio DAD, oppure momenti in cui vengono trattati specifici argomenti). Sottolineiamo che questi possibili momenti chiave non sono stati suggeriti dall'insegnante, ma emergono in modo spontaneo e variano da studente a studente.

Il più lineare e con il minore numero di fluttuazioni è quello dello studente che chiamiamo fittiziamente Antonio (Figura 1): nel grafico da lui disegnato, è evidente un rapido aumento della componente "mi piace", che si stabilizza su valori alti in prossimità della prima simulazione d'esame. A tal proposito lo studente scrive: "Ho sempre adorato matematica, i lavori di gruppo durante il Lockdown di Novembre mi hanno dimostrato che i calcoli tanto astratti come le derivate sono facilmente applicabili al quotidiano". Il livello del "sono capace" resta più basso e la sua ascesa è più lenta e si stabilizza solo dopo la seconda simulazione d'esame, comunque chiaramente al di sotto del "mi piace". Antonio segna sull'asse verticale tre valori: 0, 5 e 10. Sia la curva della disposizione

emotiva, sia quella della competenza percepita partono da una situazione di indifferenza (valore 5), fino ad assestarsi al valore 10 per il “mi piace” e 8 per il “sono capace”. Richiamiamo che il significato dei valori 5, 8 e 10 sono stati concordati tra studenti e docente.

Antonio ha superato l’esame con il massimo dei voti e dice di non essersi quasi mai annoiato durante le ore di lezione, se non nel periodo della didattica a distanza.

Figura 1
Il grafico di Antonio



Il grafico in Figura 2 è stato realizzato dalla studentessa Barbara e in questo caso la situazione è, per così dire, capovolta rispetto al caso di Antonio.

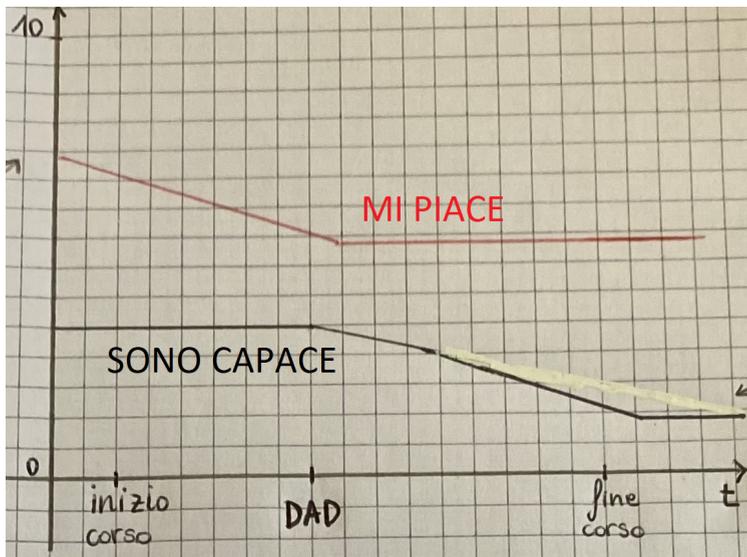
Entrambe le curve hanno un andamento in discesa, soprattutto la componente “mi piace”, che comincia a diminuire all’inizio del corso da un valore sopra la media (abbastanza vicino a 10, che è il massimo della scala) ad uno intorno a 5. La curva del “mi piace” si assesta su quest’ultimo valore durante il periodo di DAD. Tale momento coincide anche con un cambiamento nella componente “sono capace” e si osserva una costante diminuzione fino al periodo successivo alla fine del corso: “Penso di non superare l’esame perché non ho le basi per capire a pieno il corso”. La studentessa, infatti, non è riuscita ad ottenere una valutazione sufficiente e ammette di essersi annoiata parecchio perché “la matematica non l’ho mai fatta come si dovrebbe fare e quindi, avendo molte difficoltà nel comprendere le lezioni, perdevo le speranze e mi annoiavo”. Osserviamo che la fonte della noia, per Barbara, non deriva da un contenuto troppo facile nelle lezioni in cui era coinvolta, ma al contrario da una difficoltà percepita come troppo elevata. Questo tipo di noia ha un effetto negativo su tutto il percorso di apprendimento (aveva, infatti, difficoltà ad apprendere le lezioni) e sul suo senso di autoefficacia (“perdevo le speranze”), in quanto la curva del

“sono capace” si assesta su un livello molto basso.

Da notare la posizione dell’andamento del “mi piace” all’inizio del corso, che, a differenza del caso precedente, parte da una situazione positiva di apprezzamento e poi discende per restare poi costante. A Barbara infatti piace la matematica, nonostante abbia molte difficoltà nel comprenderla; questo ce lo dice anche lei: “quando a lezione mi annoio tento comunque di prestare attenzione perché trovo che la matematica sia la materia più affascinante”. Ecco, nella nostra interpretazione, la ragione per la quale la curva del “mi piace” non raggiunge livelli tanto bassi quanto quelli raggiunti dal “sono capace”.

Figura 2

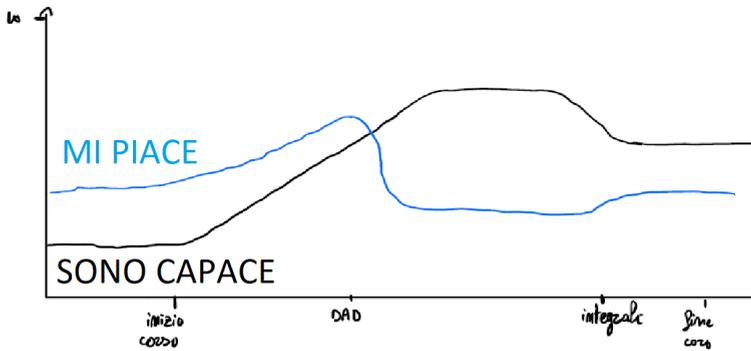
Il grafico di Barbara



Di andamento più articolato sono le curve di *Ciro* (Figura 3), il quale ha superato l’esame con una valutazione di 29/30. Evidente è l’aumento a inizio corso di entrambe le componenti: se il “sono capace” continua a salire anche dopo il periodo di DAD fino a stabilizzarsi, per poi discendere in prossimità dell’argomento riguardante gli integrali, è chiaro che il “mi piace” sia influenzato dal periodo di restrizioni riguardanti l’infezione da Covid-19 e si nota una sua diminuzione, in risalita in concomitanza degli integrali. Entrambi gli andamenti si assestano poco prima della fine del corso ed entrambe le fluttuazioni sembrano influenzate dagli integrali. *Ciro* dice di non essersi mai annoiato durante il corso, se non nel periodo di DAD, in cui: “non avevo la giusta concentrazione per seguire la lezione, quindi andavo a fumare o guardavo i social sul telefono”. Nel caso di *Ciro*, si può parlare più di distrazione, di incapacità di mantenere l’attenzione davanti allo schermo, che di noia vera e propria.

Figura 3

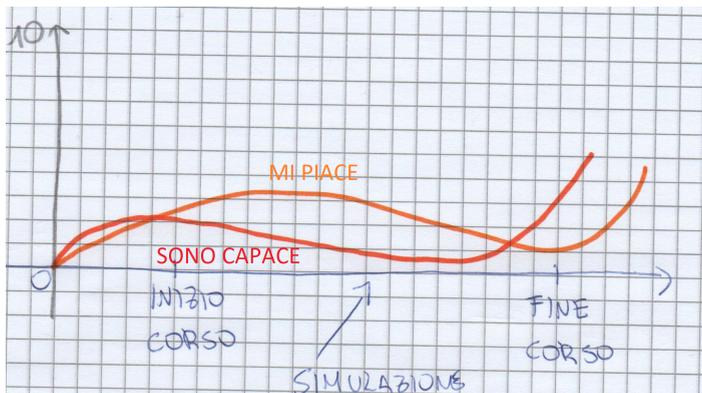
Il grafico di Ciro



Dafne ha superato l'esame con una valutazione di 20/30. Gli andamenti delle due curve nel grafico in Figura 4 oscillano ben distanti dalla soglia massima (10), che la studentessa ha indicato. Entrambe le componenti crescono prima dell'inizio del corso, ma solo il "mi piace" continua a salire fino ad assestarsi, mentre il "sono capace" diminuisce all'inizio del corso e tocca il minimo in prossimità del periodo successivo alla simulazione. Questo momento sembra condizionare anche il "mi piace": vediamo la curva scendere fino alla fine del corso per poi risalire nel periodo successivo, probabilmente in prossimità con l'esame. L'ultima fluttuazione di interesse è quella che ha il "sono capace" poco prima della fine del corso, in cui è evidente una risalita. La studentessa non si è mai annoiata durante il corso ("però forse è successo una volta o due"); quando succede dice di continuare a copiare quello che vede alla lavagna, "senza ragionare un granché". Dafne, quindi, ci racconta di una strategia per controllare la noia.

Figura 4

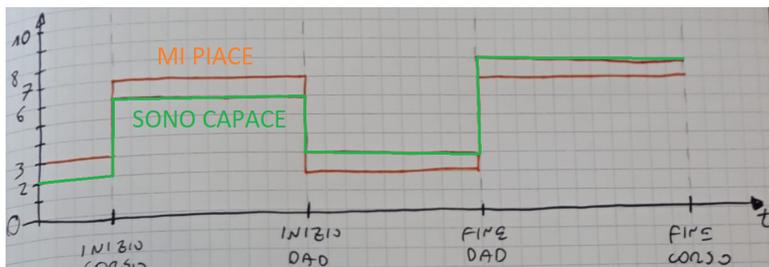
Il grafico di Dafne



Lo studente Ermanno (Figura 5) rappresenta la sua esperienza in modo squadrato, evidenziando informazioni precise sui valori numerici. Se sia “mi piace” che “sono capace” partono da valori bassi prima dell’inizio del corso (il primo da 3 e il secondo da 2), entrambe le componenti mostrano un’impennata verso l’alto. Si nota la loro fluttuazione con la medesima cadenza: tutte e due precipitano all’inizio della DAD, scambiandosi di posizione rispetto all’inizio del corso (“sono capace” vale ora 3 e “mi piace” 2), e poi risalgono al termine del periodo di restrizioni fino a stabilizzarsi: il “mi piace” raggiunge un valore di 7 e il “sono capace” arriva a 8. Ermanno ha superato l’esame con una valutazione di 24/30, piazzandosi esattamente nella media dei voti registrati dai suoi colleghi, e si è annoiato durante la DAD, principalmente perché si affrontavano argomenti che già aveva metabolizzato alle superiori. Osserviamo come, in questo caso, emerge un tipo di noia ancora diverso dai precedenti, ossia quello dovuto al contenuto percepito come troppo facile della lezione.

Figura 5

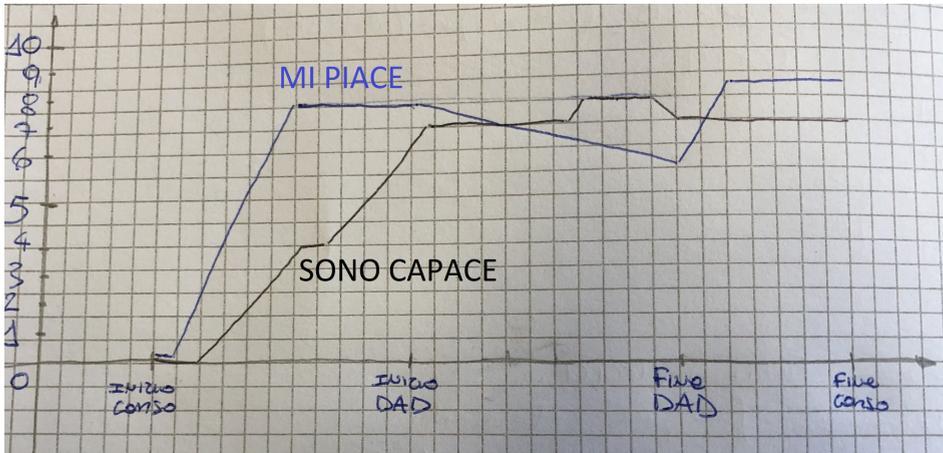
Il grafico di Ermanno



Preciso ma dagli andamenti più articolati è il grafico di Federico (Figura 6): come in molti dei casi precedenti è evidente un netto aumento di entrambe le componenti in prossimità dell’inizio del corso. La curva “mi piace” passa da un livello di disinteresse totale, pari a quota 0 come per il “sono capace”, e si assesta a un livello di circa 8, a differenza dell’altra che si ferma a 7. Se quest’ultima non viene intaccata dalla DAD e, anzi, ha un sussulto poco prima del suo termine che la porta a quota 8, lo stesso non si può affermare dalla componente “mi piace”, che invece mostra una lenta discesa causata dalla didattica a distanza e continua a diminuire fino quasi a fine corso, dove ha infine una ripida crescita grazie al ritorno in presenza.

Figura 6

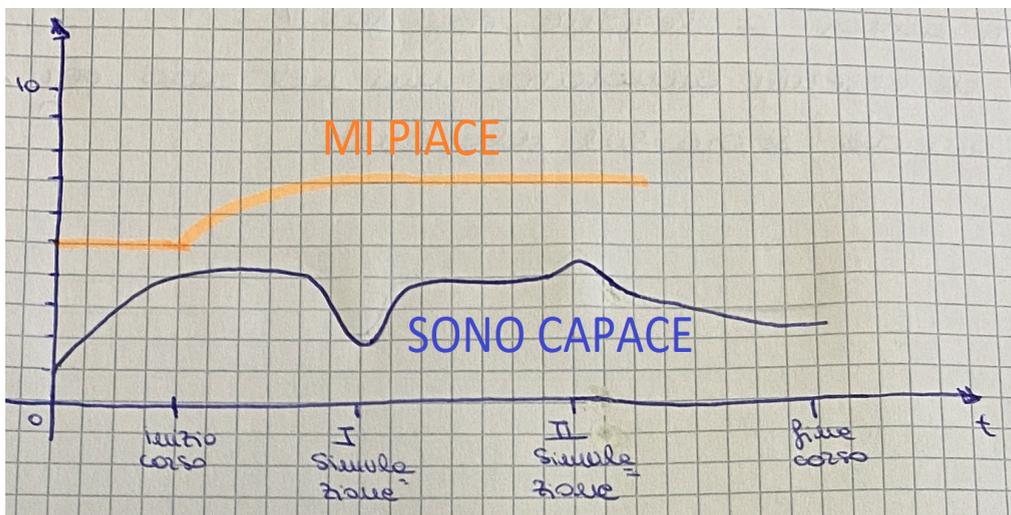
Il grafico di Federico



Federico ha superato l'esame con una valutazione di 25/30 e anch'egli non è stato immune alla noia: "mi sono annoiato qualche volta, soprattutto quando venivano spiegati argomenti che mi ricordavo e che capivo immediatamente". Quando questo accade, lo studente comincia a sognare a occhi aperti e viene sopraffatto da pensieri inerenti al proprio futuro o a "motori ecosostenibili". Infine, troviamo il grafico di Giovanna (Figura 7).

Figura 7

Il grafico di Giovanna



In questo caso è netta la differenza di andamento tra le due componenti: il "mi piace" cresce lentamente e si assesta in prossimità della prima simulazione,

evento che però determina un tracollo del “sono capace”, che comincia già a scendere poco prima e tocca il suo minimo proprio nei giorni del test. Immediatamente si riscontra una crescita repentina della stessa, che la riporta al livello precedente: l’apice coincide con la seconda simulazione. Successivamente è riscontrabile una lenta decrescita: “All’inizio ero fiduciosa, dopo la prima simulazione un po’ meno e dopo la seconda un pochino meglio. Alla fine un po’ demoralizzata”. La studentessa ha superato l’esame con il massimo dei voti, nonostante la fiducia nelle sue competenze stesse via via scemando. Noia? assolutamente no. “Non mi è mai capitato perché non me lo posso permettere: ho bisogno di seguire attentamente ogni lezione per recuperare quello che non ho appreso alle superiori”.

5. Discussione

Osservando l’andamento dei grafici di tutti gli studenti, salta all’occhio la crescita generale della componente “mi piace” all’inizio del corso, presente in quasi tutti i soggetti, ad eccezione di quello di Barbara (Figura 2), in cui la tendenza è addirittura opposta e decresce fino all’inizio della DAD. Lo stesso comportamento e le medesime osservazioni sono validi anche per le curve del “sono capace”: tutte crescono all’inizio del corso e, anche in questo caso, l’eccezione è rappresentata dal grafico di Barbara (Figura 2). Barbara è stata, inoltre, l’unica tra i soggetti dello studio a non ottenere una valutazione positiva: “Penso di non superare l’esame perché non ho le basi per capire a pieno il corso”, questo è stato il commento inerente alla sua esperienza con il corso in matematica. Barbara menziona la mancanza di basi per capire bene il corso; c’è da chiedersi se già a priori la studentessa avesse problemi con la comprensione della materia o se, visto l’inesorabile declino del “sono capace” con l’inizio della DAD, questa non abbia influito in maniera negativa. O ancora, se l’intreccio tra una inizialmente bassa competenza percepita in matematica, unita all’inizio della DAD, non abbia determinato un insuccesso per la studentessa. Possiamo, però, dire che la didattica a distanza non abbia influito positivamente sull’atteggiamento verso la matematica.

Tutti gli altri soggetti, caratterizzati da una crescita, per entrambe le curve, all’inizio, hanno invece superato l’esame. Evidente è la differenza rispetto a Barbara. La predisposizione a inizio corso ha influito positivamente sull’esito finale, quando in salita, e in modo negativo quando in discesa: resta da chiarire se sia stata la curva del “mi piace” a favorire l’aumento del “sono capace”, grazie alla predisposizione emotiva che ha alzato la fiducia nelle loro competenze, o se sia stato il contrario.

Tra coloro che hanno superato la prova, Ciro, Ermanno e Federico (Figure 3, 5 e 6) hanno inserito sulla linea del tempo la DAD, che ha determinato un crollo della componente “mi piace”, in risalita in concomitanza del termine della stessa. Un impatto differente lo ha subito la fiducia nelle loro competenze: nei

grafici di *Ciro* e *Federico* questa continua a salire (in *Ciro* viene frenata a causa degli integrali, determinandone una leggera discesa, bilanciata però dall'aumento del “mi piace”), in *Ermanno* scende e poi aumenta insieme alla predisposizione emotiva. La fiducia di *Federico* non vacilla con la DAD, anzi, ha un picco poco prima della fine per poi stabilizzarsi senza più fluttuare. Tre studenti, tre andamenti differenti per il “sono capace”. Se si considera solo la componente emotiva, risulta comune una salita in concomitanza della fine del corso: da notare che tutti e tre i soggetti hanno superato l'esame con una valutazione superiore o uguale a 24/30. Che la predisposizione emotiva all'inizio sia impattante sull'esito finale dell'esame sembra evidente, c'è da chiedersi se quella iniezione di fiducia in extremis alla fine del corso non abbia influito anch'essa sulla valutazione positiva.

Consideriamo ora coloro che hanno inserito le simulazioni d'esame sulla linea del tempo invece che la DAD: *Antonio*, *Dafne* e *Giovanna* (Figure 1, 4 e 7). Se nel grafico di *Antonio* tutte le componenti sono in salita e risulta perfino che dopo la prima simulazione la curva del “mi piace” si sia assestata al valore massimo, nel caso di *Dafne* si osserva come questa abbia determinato l'inesorabile tracollo della componente emotiva, indipendentemente dal “sono capace”, che già partiva diretto verso il basso. *Giovanna*, come *Antonio*, non si è fatta prendere dall'ansia della simulazione e notiamo infatti la componente “mi piace” sempre in salita; lo stesso non si può dire del “sono capace”, che raggiunge un picco negativo alla prima, positivo alla seconda e poi continua a diminuire fino alla fine. Anche in questo caso la competenza percepita ha fluttuazioni completamente differenti tra i tre soggetti considerati. *Antonio* e *Giovanna* hanno ottenuto il massimo dei voti, mentre *Dafne* ha conseguito un 20/30: i primi due, che hanno ottenuto una valutazione superiore alla media, hanno rappresentato il “mi piace” con una tendenza positiva alla fine, nel grafico di *Dafne*, invece, la cui valutazione non supera la media¹ di 24/30, la componente emotiva scende fino alla fine del corso e poi, per motivi ignoti, risale.

Esattamente come nel caso degli studenti che hanno inserito la DAD, anche in chi ha inserito le simulazioni d'esame sembra esserci una relazione tra il voto superiore alla media e la tendenza in salita del “mi piace” alla fine del corso; l'eccezione del grafico di *Dafne* sembra confermarlo.

Per quanto riguarda la noia, possiamo descrivere la sua manifestazione in tre differenti modalità: durante la DAD, sempre accompagnata da una discesa del “mi piace”, e quindi legata alla perdita di contatto umano, in *Ermanno* e *Federico* quando si affrontano argomenti “che mi ricordavo e capivo immediatamente”, ovvero in caso di competenze già acquisite rispetto a quelle

¹ Siamo consapevoli che per *Dafne* un voto di 20/30 in matematica potrebbe essere un “bel voto” e che, quindi, il riferimento alla media dei voti conseguiti è puramente indicativo della performance.

affrontate durante il corso, e in Barbara perché “penso di non avere le basi per capire bene il corso”, nel cui caso si manifesta a causa di competenze insufficienti e difficilmente colmabili.

6. Conclusione

In questo lavoro, abbiamo utilizzato la metodologia del graphing affect per raccogliere dati sugli atteggiamenti degli studenti verso la matematica, in particolare sulle componenti relative alla disposizione emotiva (“mi piace”) ed alla competenza percepita (“sono capace”), per osservare come evolvono nel corso del I semestre del I anno di un corso di laurea STEM. Le ragioni della scelta di questo focus di ricerca risiedono nell’importanza, sottolineata da ricercatori come Varani (2000), delle emozioni nei processi di apprendimento, anche se esse hanno un ruolo complesso e difficile da indagare. Questa è la sfida che abbiamo cercato di cogliere.

Uno dei risultati che ci sembrano più interessanti da portare come conclusione di questa ricerca è la relazione tra crescita della curva del “mi piace” ad inizio corso e a fine corso, e successo all’esame. Per i (pochi) studenti cui il contenuto matematico del corso non piace all’inizio (e per i quali la curva della disposizione emotiva non sale), l’esame ha un esito peggiore. Questo risultato è forte, ma andrebbe confermato su un campione più numeroso di studenti e sarà oggetto di una indagine futura.

Altro risultato interessante, che conferma le ricerche di Pietro Di Martino e Rosetta Zan, è il forte intreccio tra piacere verso la matematica e sentirsi capaci.

Il terzo risultato interessante riguarda la DAD, che per gli studenti che l’hanno menzionata ha rappresentato un momento di calo degli atteggiamenti positivi. Questo vale soprattutto per la studentessa che aveva difficoltà iniziali e che non ha, poi, superato l’esame. Tuttavia, guardando il campione generale, non sembra che i grafici degli studenti ne siano influenzati. Possiamo dire con una certa evidenza che il periodo della DAD ha segnato una demarcazione temporale, ma i commenti degli studenti sembrano piuttosto legati non alla DAD in quanto tale, ma piuttosto agli argomenti trattati nelle lezioni in DAD.

Riferimenti bibliografici

- Anderson, J. (2005). I didn’t know what I didn’t know: A case study of growth in teacher knowledge within the Intermediate Numeracy Project. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Research, theory and practice, Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Group of Australasia, Melbourne* (Vol. 1, pp. 97–104). MERGA.
- Beswick, K. (2006). Changes in preservice teachers’ attitudes and beliefs: The net

- impact of two mathematics education units and intervening experiences. *School Science and Mathematics*, 106(1), 36–47.
<https://doi.org/10.1177/00224871221105801>
- Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM, Mathematics Education*, 43(4), 471–482.
<https://doi.org/10.1007/s11858-011-0309-6>
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11, pp. 25–41). Kluwer Academic Publishers.
- Falzetti, P. (2021). *I dati INVALSI come strumento per migliorare la didattica della matematica nella scuola primaria*. Franco Angeli Editore.
- Fennema, E., & Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7(5), 324–326. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0236>
- Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics* 49(1), 25–46.
<https://doi.org/10.1023/A:1016048823497>
- Ingram, N. (2007). A story of a student fulfilling a role in the mathematics classroom. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice, Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Tasmania* (pp. 450–459). MERGA.
- Ingram, N. (2011). *Affect and identity: The mathematical journeys of adolescents* (Doctoral dissertation). University of Otago. <http://hdl.handle.net/10523/1919>
- Leont'ev, A. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Prentice-Hall.
- Liljedahl, P., & Allan, D. (2013). Studenting: The case of “now you try one”. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257–264). PME.
- Liljedahl, P. (2014). Emotions as orienting experiences. In L. Sumpter (Ed.), *Proceedings of the 20th International Conference on Mathematical Views (MAVI)* (pp. 1223–1230). Ogskolan Dalarna.
- Mandler, G. (1984). *Mind and body: Psychology of emotion and stress* (pp. 1223–1230). Norton.
- Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2006). ‘Accepting emotional complexity’: A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, Special Issue*, 63(2), 193–207. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9034-4>
- McDonough, A., & Sullivan, P. (2014). Seeking insights into young children’s beliefs about mathematics and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 279–296. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9565-z>
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). McMillan.
- McLeod, D., Craviotto, C., & Ortega, M. (1990). Students’ affective responses to non-routine mathematical problems: An empirical study. In G. Booker, P. Cobb, & T. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Annual Conference of the International*

- Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter 12th PME-NA Conference* (pp. 159–166). Mexico.
- Pajares, F., & Miller, D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of Educational Psychology, 86*(2), 193–203. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.86.2.193>
- Radford, L. (2015). Of love, frustration, and mathematics: A Cultural-historical approach to emotions in mathematics teaching and learning. In B. Pepin & B. Rösken-Winter (Eds.), *From beliefs and affect to dynamic systems: (exploring) a mosaic of relationships and interactions* (pp. 25–49). Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4_2
- Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19*(6), 551–554. <https://doi.org/10.1037/h0033456>
- Smith, J. P., & Star, J. R. (2007). Expanding the notion of impact of K–12 standards-based mathematics and reform calculus programs. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(1), 3–34.
- Varani, A. (2000). Emozioni, apprendimento, ipermedialità. *Psicologia e Scuola, 20*(98), 3–10.
- Walter, J. G., & Hart, J. (2009). Understanding the complexities of student motivations in mathematics learning. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(2), 162–170. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.07.001>
- Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 113–121. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-9028-2>

Teachers' emotions during a professional development program based on lesson study

Le emozioni degli insegnanti durante un programma di formazione professionale basato sullo *lesson study*

Emociones del profesorado durante un programa de desarrollo profesional basado en el estudio de clase (*lesson study*)

Laura Muñiz-Rodríguez e Luis J. Rodríguez-Muñiz

Department of Statistics and O.R. and Mathematics Education,
Universidad de Oviedo, Spagna.

Abstract. *Lesson study is a method of professional development with considerable benefits for teachers. This paper aims at exploring teachers' emotions during a professional development program based on a two-cycle lesson study. In this exploratory study, a sample of 41 elementary education teachers was considered. Two versions of a questionnaire were applied, and the answers were quantitatively analyzed. Despite several negative emotions appeared during the first implementation cycle, the results evidence a substantial change in teachers' perceptions towards curiosity, engagement, and relief.*

Keywords: lesson study, professional development, teachers' emotions.

Sunto. *Il lesson study è un metodo di formazione professionale con notevoli benefici per gli insegnanti. Questo articolo si propone di esplorare le emozioni degli insegnanti durante un programma di formazione professionale basato su un lesson study in due cicli. In questo studio esplorativo è stato considerato un campione di 41 insegnanti di scuola primaria. Sono state somministrate due versioni di un questionario e le risposte sono state analizzate quantitativamente. Nonostante diverse emozioni negative comparse durante il primo ciclo di implementazione, i risultati evidenziano un sostanziale cambiamento nelle percezioni degli insegnanti verso la curiosità, l'impegno e la tranquillità.*

Parole chiave: lesson study, formazione professionale, emozioni degli insegnanti.

Resumen. *El lesson study es un método de desarrollo profesional con considerables beneficios para el profesorado. El objetivo de este trabajo es explorar las emociones de los docentes durante un programa de desarrollo profesional basado en un lesson study de dos ciclos. En este estudio exploratorio se consideró una muestra de 41 docentes de educación primaria. Se aplicaron dos versiones de un cuestionario y se*

analizaron cuantitativamente las respuestas. A pesar de que aparecieron varias emociones negativas durante el primer ciclo de aplicación, los resultados evidencian un cambio sustancial en las percepciones del profesorado hacia la curiosidad, el compromiso y la tranquilidad.

Palabras clave: lesson study, desarrollo profesional, emociones del profesorado.

1. Introduction and theoretical framework

Mathematics teachers' professional development (PD) is a key issue in educational research. Transforming teachers' prior knowledge, experiences and beliefs into professional competences is one of the main purposes of PD (Alsina & Mulá, 2019). To accomplish this goal, Alsina and Mulá (2019) stand up for a PD model based on education for sustainability and reflective learning. Reflection in teacher education fosters collaboration and self-regulation, helps to understand teachers' own competences and beliefs, and provides strategies to improve teachers' practice (Korthagen, 2001). However, reflective learning is also a challenge for teachers, that requires awareness of their own knowledge, experiences and beliefs, and willingness to adopt alternative professional practices (Korthagen & Vasalos, 2005). In this sense, exploring teachers' emotions during professional training is crucial to understand the impact of PD methods in view of competence acquisition, teachers' beliefs, and expectations (Funghi, 2022; Sutton & Wheatley, 2003).

Lesson study is a PD method for teachers initiated in Japan, with varying degrees of success and challenges in other countries (Fernandez, 2002; Fernandez & Yoshida, 2012; Murata, 2011). Formally, it consists of one or more cycles composed of several elements: based on prior exhaustive research on classroom materials, teachers design a lesson focused on problem-solving, which is taught by one teacher under the observation of others, followed by a group discussion to judge whether the lesson accomplished the purposes (Clivaz & Takahashi, 2018). In practice, individual interpretations of this method have led to adapted implementations (Ní Shúilleabháin, 2017; Ponte et al., 2017; Winslow et al., 2017), but they all concur on a process that encompasses lesson planning, observation, and reflection, being the latter component one of the most effective for the development of teachers' professional competences (Alsina & Mulá, 2019). According to research, lesson study has considerable benefits for teachers, since it improves teaching and learning, explores effective ways to implement alternative teaching practices, among others (Clivaz & Takahashi, 2018; Funghi, 2022; Lewis, 2002).

As mentioned before, contextual differences might derive in deviations regarding the implementation of a lesson study (Ramproud et al., 2022). Also, according to Alsina and Mulá (2019) teachers' competence and expertise are context dependent. In this sense, Mellone et al. (2021) conceived the cultural transposition framework, referring to the implementation of didactic practices

coming from foreign cultures in a particular context. Despite implementation differences, lesson study showed to have potential as a PD method for teachers (Funghi, 2022; Ramploud et al., 2022).

Emotions can be described according to two dimensions: valence (positive or negative) and activation (activation and deactivation) (Pekrun, 2017). On the one hand, positive emotions are pleasant feelings that make one feel good and happy, whereas negative emotions are unpleasant feelings that can include anger, fear, sadness, disappointment, and shame. On the other hand, activation refers to the process of triggering or intensifying a particular emotion in oneself or others, while deactivation applies to the process of reducing or suppressing a particular emotion in oneself or others. The study of teachers' emotions in mathematics education has been extensive in the last decades, moving from a positivistic paradigm to an interpretative one (Coppola et al., 2012). Despite the case of prospective primary teachers has been analyzed in-depth and in-service teachers' emotions inside the classroom are also quite well-documented, Saunders (2013) states that: "we know very little about the emotions teachers experience when they make such changes [about their pedagogical and instructional practices] as part of PD programs" (p. 304). Even when emotions and PD have been analyzed in-depth, it is not frequent to find research about emotions during PD programs (Gaines et al., 2019). According to Saunders (2013), lesson study produces changes in teachers' emotions. Kadrron and Inprasitha (2013), when analyzing the adaptation to Thailand of the Japanese model of lesson study, prove how teachers' values about teaching mathematics changed. Mellone et al. (2021) studied a cultural transposition experience of PD and checked how it provoked positive affects in the two participant teachers. Taxer and Frenzel (2015) pointed out that, to avoid emotions faking: "decreasing the experience of negative emotions and increasing the experience of positive emotions could be done, for example, through improved classroom management skills, which can already be taught within teacher education programs" (p. 86). Vermunt et al. (2019) showed how a lesson study-based PD reduced the prevalence of the so-called teachers' *problematic* learning path (Bakkenes et al., 2010), that is, teachers who:

struggled with the educational innovation, experienced many frictions between how they wanted to teach and how that worked out in practice, often had no idea how to teach in another way, did not know how they might learn to teach in another way, had many negative emotions and sometimes avoided learning about the innovation at all. (Bakkenes et al., 2010, p. 64)

After the lesson study, these teachers realized about more different ways to teach than the one they knew, and then, reduced their negative emotions and increased their willingness to change. Finally, Cross Francis et al. (2020) conducted several coaching sessions analyzing class videos with mathematics teachers to show that emotions often are revealed in a mixed or blended way and that considering more general emotional experiences and not only feelings

about teaching mathematics “provides insight into the complexity of the emotional experiences of elementary teachers in relation to mathematics” (Cross Francis et al., 2020, p. 15).

The aim of this paper is to explore what teachers’ emotions are and how they changed after a PD program designed on a video-based adaptation of the lesson study model. From the previous literature we can raise three research questions: (RQ1) What teachers’ emotions arise during and after the PD program? (RQ2) Do teachers combine positive and negative emotions at the same time? (RQ3) Did the PD program change teachers’ emotions?

2. Methodology

2.1. Context

We briefly describe the context of Andorran school, where lesson study was implemented. The Principality of Andorra is a very small country landlocked in the Pyrenees with over 77,000 inhabitants. In the country three school systems live together: the French, the Spanish, and the Andorran ones. The Andorran school is organized by the Ministry of Education, and it consist of eight schools (grades K-6) and four high schools (three for grades 7th to 10th, and one for grades 11th and 12th). Vehicular languages for all the subjects (including mathematics) are Catalan and French (alternating in odd and even grades).

In 2010-2011 the Ministry started a program called PERMSEA (Ministry of Education, 2022), acronym from Strategic Plan for the Renewal and Improvement of the Andorran Educational System in the original Catalan. The PERMSEA has made a strong commitment to the competency model. Particularly, in elementary mathematics, three competences are addressed: solving mathematical problems and applications to contexts of daily life; applying mathematical reasoning to situations contextualized with mathematics; communicating concepts, processes, and mathematical results through a diversity of representations. These competences organize all the assessment instruments, and they are achieved by several mathematical contents organized into four blocks: numbers, operations, and calculus; space and shape; measurement; and statistics and probability.

In 2019-2020 and 2020-2021 the authors elaborated an internal diagnostic report about the situation of mathematics education in the Andorran school, after conducting class observations and interviews with all the involved agents (teachers, principals, Ministry, etc.). In the interviews, elementary school teachers expressed that they felt rather insecure about their mathematical pedagogical knowledge and competences, presumably because of their initial training, since part of them held a degree in humanities, philology or law, i.e., did not have a background related to mathematics education, some even not in education. Nevertheless, they had followed extensive teachers’ continuous training programs organized by the Ministry. One of the recommendations in

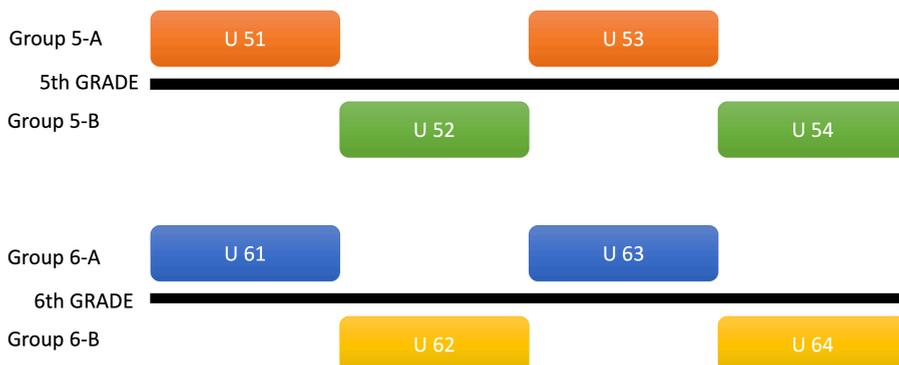
the report was to reinforce the PD of elementary teachers by following a training-in-action program (Kyei-Blankson, 2014). A transposition of lesson study to the Andorran school was designed (Capomagi et al., 2022; Rodríguez-Muñiz et al., 2023), named Andorran Lesson Study (ALS) and it was undertaken during the academic year 2021-2022, aiming at supporting teachers' role during the implementation of the new lesson units to be deployed in that academic year. Thus, teachers are considered as the crucial agent in the curricular reform (Coles et al., 2023).

2.2. Population

This was a census study, since all the population was part of the sample. The population consisted of all the teachers of 5th and 6th grades (i.e., they teach 10-11 and 11-12 years old students) of elementary education in the Andorran school. There were 21 teachers in the 5th grade and 20 in the 6th grade, belonging to eight different schools in the Principality. In order to organize the lesson study, each group of teachers in one grade was divided into two subgroups (named 5-A, 5-B, 6-A and 6-B, respectively) and it was assigned with two (out of four) lesson units, so that, at the end, each teacher participated in the recording and analysis of two alternate units in the academic year 2021-2022, as illustrated in Figure 1. Thus, each group of teachers participated in a two-cycle lesson study, each cycle consisting of the implementation and recording of a lesson unit, followed by a group discussion.

Due to logistic limitations, several adaptations of the original lesson study model were adopted for this research. The main differences were the fact that the observation was done by means of a video recording of the participant teachers, and that the discussion sessions were held after the full unit was taught, instead of after each lesson.

Figure 1
Organization scheme of the lesson units (own elaborated)



At the end of each unit, researchers and teachers held a discussion meeting to deal with the obstacles that arose during the implementation of the unit, as well as to share good practices identified by the researchers in the videoclips, and to point out limitations found in the recordings (in this last phase, the videos were not shown, to avoid teachers feeling publicly singled out). The distribution of teachers in each group is shown in Table 1. The discussion sessions were held, respectively, in November 2021, February 2022, April 2022, and June 2022.

Table 1

Distribution of teachers in groups

Group	Number of teachers
5-A	10
5-B	11
6-A	9
6-B	11

2.3. Instrument

After each cycle, teachers were asked to fill in a questionnaire in which several questions about their emotions during the process were posed. After the first cycle (that is, after units 51, 61, 52 and 62) teachers were asked to answer the following questions:

- Q1. Indicate how confident you were, before starting the training, that it would help you in your PD. [Choose only one option: None – Scarce – Indifferent – Quite a lot – A lot].
- Q2. Indicate if you had any of these emotions during the recording process (You can mark as many as you consider necessary): Discomfort, Bother, Discouragement, Anxiety, Uncertainty, Excitement, Confidence, Motivation, Engagement, Burden, Curiosity, Worry, Relief.
- Q3. And during the discussion phase? (You can mark as many as you consider necessary): [same options as in the Q2].
- Q4. Do you consider that a secure discussion has been achieved regarding the possibility of feeling lost, insecure or of being wrong mathematically? [Choose only one option: Yes – No – Doubt].
- Q5. Indicate, from 1 (minimum) to 5 (maximum), the level of confidence you felt during the discussion.
- Q6. Indicate, from 1 (minimum) to 5 (maximum), the degree of confidence and security that the person who led the discussion has inspired in you.
- Q7. Indicate, from 1 (minimum) to 5 (maximum), how useful you think this training program will be for you.
- Q8. Indicate the degree of confidence you have, after completing this first cycle, that it will serve you for your PD. [Choose only one option: None – Scarce – Indifferent

– Quite a lot – A lot].

After the second cycle (that is, after units 53, 63, 54 and 64) teachers were administered another version of the instrument in which the former Q1 was substituted by the following one:

Q1*. What is your degree of satisfaction with the first cycle of the training? (Very low – Low – Medium – High – Very high)

A question about their perception of change about several emotions was also added:

Q9. If you participated in the first cycle, indicate if you consider that, in this second cycle, you have felt (regarding mathematics and its teaching and learning) more or less: Confident, Secure, Motivated, Overwhelmed, Anxious, Prepared, Uncomfortable, Engaged, Excited, Worried, Calm. [Options for each emotion were: Less – Similar – More].

All the participant teachers answered the questionnaires. After units 51, 61, 54 and 64 the questionnaire was administered in paper form. After units 52, 62, 53 and 63, the discussion was held online, and the questionnaire was administered using Microsoft Forms®.

2.4. Analysis

The data was analyzed using descriptive statistics with Microsoft Excel® and Google Sheet®. Graphics were rendered with Google Sheet®. Descriptive analysis was performed considering aggregate data. Since anonymity among participants was respected, it was impossible to focus on individual data changes.

3. Results

Since every group of teachers filled in the questionnaire twice (after each discussion session), we gathered the results after the first discussion (held in November 2021 for groups 5-A and 6-A, and in February 2022 for groups 5-B and 6-B), and after the second discussion (held in April 2022 for groups 5-A and 6-A, and in June 2022 for groups 5-B and 6-B).

3.1. Results after the first discussion session

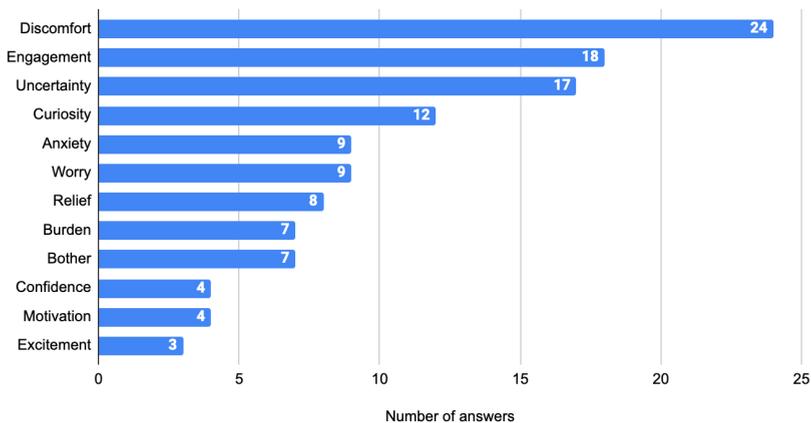
In the answers to Q1 about how teachers initially perceived how helpful the training was going to be for their PD, 72.5% of the teachers thought it was going to be quite helpful, 2.5% were indifferent and 25% thought it was going to be scarcely helpful.

Figure 2 shows the emotions while recording the videoclips (Q2). Discomfort was the most frequent emotion, followed by engagement and utility, but many activation and negative emotions (Posner et al, 2005 appeared quite

frequently (anxiety, worry, burden, bother), whereas positive ones were less represented (motivation, confidence, and excitement).

Figure 2

Emotions while recording the videoclips (Q2), after the first discussion (own elaborated)

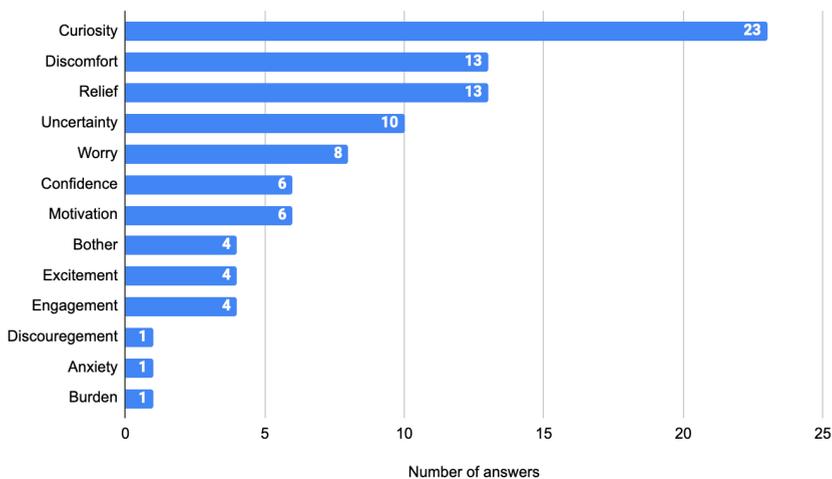


Since Q2 was multiple choice, it is also interesting to analyze the associations between emotions. The most common pair was discomfort-engagement (appearing 10 times), followed by discomfort-uncertainty (9), discomfort-anxiety (7), uncertainty-engagement (7), and uncertainty-curiosity (7). Discomfort-curiosity, anxiety-uncertainty, anxiety-engagement, and curiosity-engagement appeared 6 times each.

Figure 3 shows teachers' emotions during the first discussion (Q3).

Figure 3

Emotions during the discussion (Q3), after the first discussion (own elaborated)



As we can see, more positive emotions than in Figure 2 appeared, being curiosity, by large, the most frequent, and other positive and deactivation emotions as relief or confidence increased. On the other hand, negative emotions as anxiety or burden were considerably reduced. The most frequent was curiosity-worry (7 times), followed by curiosity-relief (6) and discomfort-curiosity (5).

Most of the teachers considered that a secure discussion was held (85.9%), while 9.8% doubted and only 4.9% felt it was not secure (Q4). Table 2 shows the average and median Likert-scores (from 1 to 5) for questions 5, 6, and 7, as well as the standard deviation. The discussion made the teachers felt confident and it created a good climate with the trainer.

Table 2

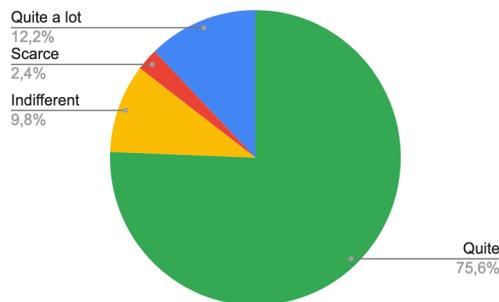
Average, median and SD of scores in Q5, Q6, and Q7 after the first discussion

Question	Average	Median	SD
Q5. Level of confidence you felt during the discussion	3.6	4	.79
Q6. Degree of confidence and security that the person who led the discussion has inspired in you	4	4	.97
Q7. How useful you think this training program will be for you	3.7	4	1.05

Finally, Figure 4 shows the distribution of answers to Q8, about the confidence in the utility of the training for their PD after completing the first discussion. Answers to Q8 are coherent with those to Q7, and we can see that, compared to the results in Q1, the discussion improved the level of confidence, since now 12.5% of the teachers answered 'Quite a lot', and there was a considerable reduction of skepticism.

Figure 4

Confidence in the utility for PD, after the first discussion (own elaborated)

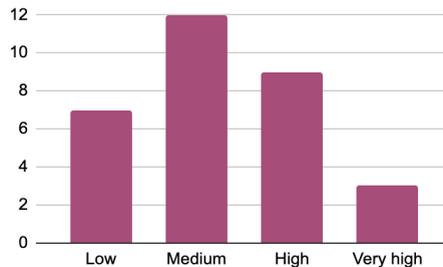


3.2. Results after the second discussion session

Figure 5 shows that the degree of satisfaction with the training after the first cycle (Q1*) was moderately high.

Figure 5

Degree of satisfaction with the training after the first cycle (own elaborated)



Regarding the emotions while recording the videoclips (Q2), Figure 6 illustrates that there were still some negative emotions as discomfort (frequency 17), being engagement, by large, the most frequent (21). This fact is also evidenced when analyzing the associations between terms, being the pair engagement-relief (8 times) the most frequent, followed by engagement-curiosity (7), discomfort-engagement (6), discomfort-burden (5), discomfort-worry (5), confidence-engagement (5), and motivation-relief (5).

When comparing the emotions while recording the videoclips during the first and the second cycles (Figure 7), we notice a considerable reduction of discomfort and uncertainty, which were the two most frequent emotions in the first cycle, a general reduction of the negative and activation emotions (bother, burden, anxiety, worry), and a noticeable increase of relief (positive and deactivation).

Figure 6

Emotions while recording the videoclips (Q2), after the second discussion (own elaborated)

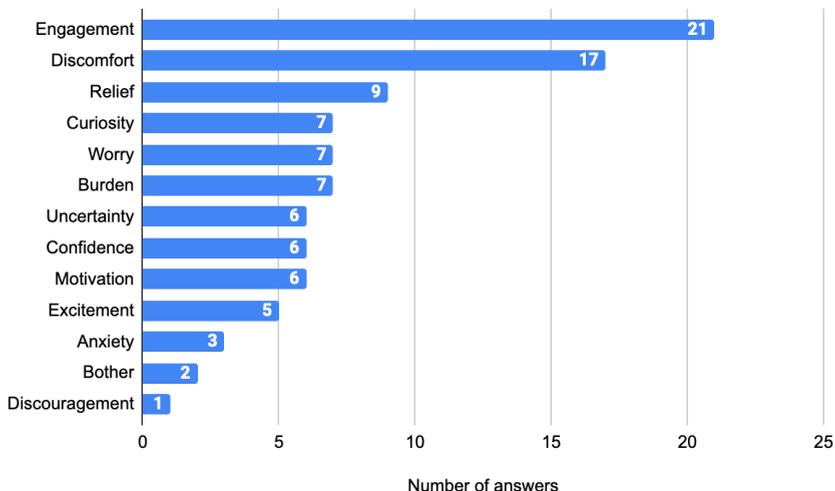


Figure 7

Changes in the emotions while recording the videoclips (Q2), between the first and the second cycles (own elaborated)

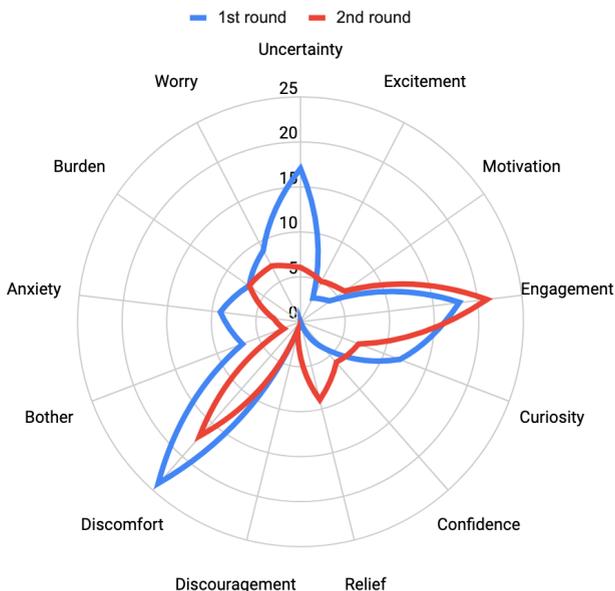


Figure 8 shows the analysis of the emotions during the second discussion (Q3), with a decrease of negative emotions and a clear increase of positive ones with respect to the first cycle. Also, the associations varied, being curiosity-relief (12

times) the most frequent, followed by far by curiosity-engagement (7) and engagement-relief (5). The change in the emotions is much clearly evidenced when comparing term by term between the two cycles (Figure 9), where we can see the reinforcement of positive emotions, and the reduction of negative ones.

Figure 8

Emotions during the discussion (Q3), after the second discussion (own elaborated)

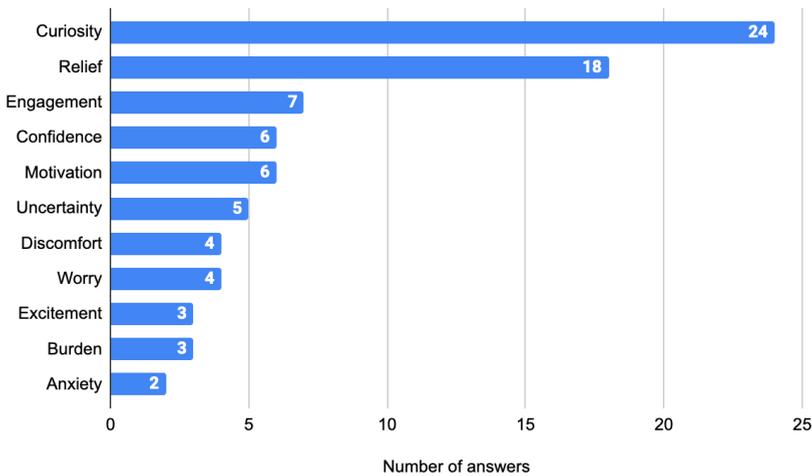
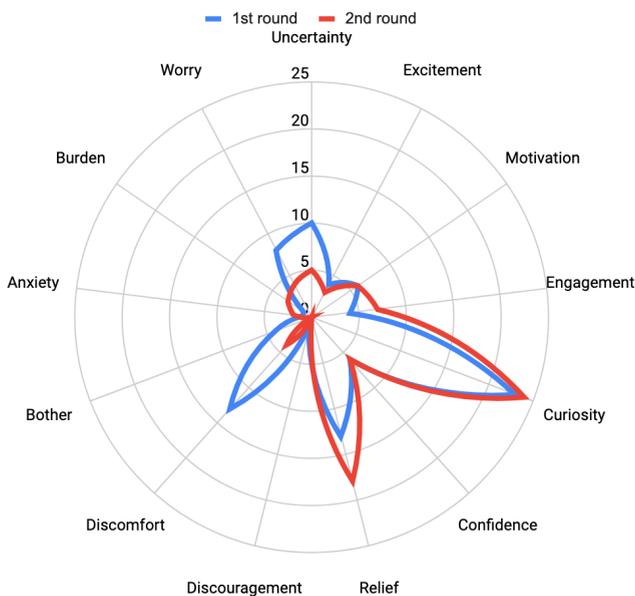


Figure 9

Changes in the emotions during the discussion (Q3), between the first and the second cycles (own elaborated)



Regarding the comfort during the second discussion (Q4), as in the first cycle, most teachers considered it was a secure session (77.8%), with 13.9% doubting and 8.3% considering it was not secure. In Table 3 the average, median and standard deviation of Likert-scores for questions 5, 6, and 7 are displayed. As in the first cycle, these values evidence a good climate during the second discussion, as well as moderately high perception of the utility of the program.

Table 3

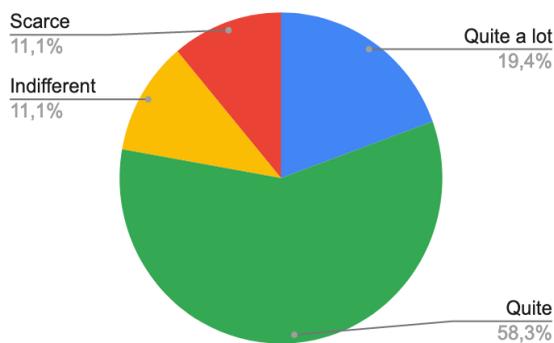
Average, median and SD of scores in Q5, Q6, and Q7 after the second cycle

Question	Average	Median	SD
Q5. Level of confidence you felt during the discussion	3.7	4	.6
Q6. Degree of confidence and security that the person who led the discussion has inspired in you.	4	4	1
Q7. How useful you think this training program will be for you	3.4	4	1

In Figure 10 we display the distribution of the answers to Q8, about the confidence in the utility of the training for their PD after completing the second discussion. Even when ‘Quite a lot’ increased compared to the first cycle, there was also a moderate increase of skepticism about the utility.

Figure 10

Confidence in the utility for PD, after the second discussion (own elaborated)



Finally, when analyzing Q9, we can see in Table 4 that the reduction of negative emotions is again supported by the data, as well as noticeable increase of positive ones. However, results show a tendency in teachers to judge themselves to feel the similar emotions when asked one by one, in contrast with the analysis of the data displayed in Figures 7 and 9, which evidenced much more the increase of positive emotions and the decrease of negative ones.

Table 4*Answers to Q9 (how have you felt in the second cycle compared to the first one?)*

<i>Emotion</i>	Less	Similar	More
Confident	5.7%	57.1%	37.1%
Secure	2.9%	51.4%	42.9%
Motivated	11.4%	54.3%	34.3%
Overwhelmed	48.6%	45.7%	5.7%
Anxious	54.3%	42.9%	2.9%
Prepared	-	65.7%	34.3%
Uncomfortable	51.4%	42.9%	5.7%
Engaged	-	80.0%	20.0%
Excited	11.4%	71.4%	17.1%
Worried	42.9%	57.1%	-
Calm	-	57.1%	42.9%

4. Discussion

Regarding the first research question (RQ1: What teachers' emotions arise during and after the PD program?) results show an initial quite positive expectation about the helpfulness of the PD. That expectation is consistent with the preliminary report, in which it was pointed out that teachers acknowledged the challenges that they had when implementing the PERMSEA regarding their specialized knowledge. They were committed teachers who recognized and identified their own limitations, which represents a quite good basis for any PD program.

Negative and activation emotions prevailed while recording the videoclips during the first cycle, together with engagement and uncertainty. This is a natural result since classroom observation was very traditional in the Andorran school, but teachers were not used to be recorded. The latter explains, on the one hand, emotions as discomfort, anxiety or worry, and, on the other hand, the uncertainty about how the recordings were going to be used later. Engagement can also be explained due to the compulsory nature of the PD program. The emergence of negative emotions is consistent with Cross Francis et al. (2020), who pointed out that the use of videos increases the "insight into the complexity of the emotional experiences of elementary teachers" (p. 15), making more evident teachers' emotional fluctuations. On the contrary, this finding is not consistent with Taxer and Frenzel (2015), who underlined that more positive

than negative emotions are experienced during a classroom observation. This point shows, in our opinion, that the process of recordings is mediating the type of emotions that teachers felt.

The emotions during the discussion session in the first cycle were different, even when discomfort and worry were still present (it was the first time they held such a discussion around classroom recordings), more positive emotions arose: teachers were more used to hold discussions in previous trainings, but not around a classroom videoclip. Again, the recordings act as mediators in the emotional dimension of the PD.

When considering the results from the second cycle, during the recording of the classrooms and, especially, during the discussion more positive emotions appeared, noticeably the engagement becomes the modal emotion while recording and curiosity while discussing. Yet some negative emotions appeared, but this was not necessarily an indicator of negative consequences, Gaines et al. (2019) pointed out that unpleasant emotions can positively influence teachers' conceptual growth after an in-practice PD program, in other words, if the PD becomes superficial, it does not mobilize negative emotions. To this extent, also Saunders (2013) underlined the importance of negative emotions, as worry or anxiety when teachers have to face their peers' views within PD programs.

Answers to questions 5 to 8 after both cycles showed a quite good reception of the program: a high degree of confidence in the facilitators (the researchers) and in the utility of the PD program. Answers to Q1* show that the reception of the first cycle was considered moderately satisfactory.

As regards the second research question (RQ2: Do teachers combine positive and negative emotions at the same time?), teachers combine both positive and negative emotions and activation and deactivation ones (discomfort-engagement, curiosity-worry, engagement-relief, etc.). These findings endorse previous literature as in Scott and Sutton (2009), who claimed that "teachers often made both strongly negative and strongly positive statements when reflecting on professional development" (p. 166) moving along a continuum. Saunders (2013) also identified what she names "mixed emotional patterning response", ranging from "worry, anxiety, uncertainty, disappointment and anger to happiness, enjoyment, confidence and enthusiasm" (p. 327). This combination of emotions reflects the complexity of thinking about the way we teach mathematics and the reasons why we do it in a certain way, as Cross Francis et al. (2020) already remarked.

The last research question (RQ3: Did the PD program change teachers' emotions?) can be clearly answered in an affirmative way. Emotions considerably changed during and after the PD program. Figures 7 and 9, together with Table 4, evidence a substantial change from the first to the second cycle in emotions, both while recording the videoclips and during the discussion session, significantly moving from a more negative to a more positive general scheme. In Figure 7 it is also noticeable the increase of uncertainty from the first

to the second cycle. We interpret this as an effect of the PD program: after the teachers discussed about the videoclips during the first cycle and interacted with the facilitators, they started thinking about their own practices while recording the clips for the second cycle. That is, as Vermunt et al. (2019) pointed out, once teachers become aware of some problems in their teaching, they realize that their usual way to teach maybe does not suffice. Figure 9 endorses our interpretation of the process of the PD program: after the second cycle, the teachers already knew what the discussion was going to be about, and, thus, a relevant decrease in discomfort but also in the uncertainty, together with an increase in the relief is noticeable.

It is also relevant the slight decrease in the security that teachers felt during the discussion (Q4 in the questionnaire), which was reduced from 85.9% to 77.8%. We think this is related to teachers' high expectations after the first cycle, that maybe led them to assume that in the second cycle everything was going to be more controlled (as the *problematic* profile in Vermunt et al., 2019), but we can only hypothesize about this fact. The answers to questions 5, 6, and 7 did not vary substantially, but it is interesting to underline changes in the answers to Q8: there was an increase in the percentage of teachers who considered the program quite a lot useful for their PD (from 12.2% to 19.4%) but also an increase in those who considered it scarcely useful (from 2.4% to 11.1%). While it is likely that the *problematic* profile is still related to this fact, we also interpret it in terms of Gaines et al.'s (2019) remark about a view of PD as a tool to provide concrete and immediately applicable practices to be used in the classroom, rather than a transformation program, as we conceived the PD, following Zeichner (2012), since a practice-based-only PD highly likely leaves out other relevant aspects of teaching. That is, our design for the PD was grounded on practice (classroom recordings) but aiming at transforming teachers' specialized knowledge, practices, and emotions. In fact, in the academic year 2022-2023 we continued with the PD program but focusing on training about certain aspects as mathematical generalization and problem-solving strategies which are not directly linked to any lesson unit, as a way for complementing the previous training.

These findings regarding teachers' emotional aspects in the PD program have been transferred to the Andorran Ministry of Education, who shares with the authors the need to act based on empirical results, and to acknowledge emotional experiences of teachers at the core of their PD (Saunders, 2013).

Several implications for theory and practice arise from the previous findings. Research about teachers' emotions during PD programs is still scarce. Therefore, this research study holds significant value in its support of the limited existing results on this topic, expanding the knowledge in this area. As mentioned before, lesson study is a PD method with substantial implementation differences and varying degrees of success. In this sense, this research study is pioneer in the context of Andorra, but also in the Spanish context, in considering

emotions during a great-scale lesson study PD program. Besides, it offers the possibility to trigger analogous studies in other countries to subsequently compare data.

Before concluding, the limitations of this study must be pointed out. These findings are highly particular to the context of Andorra, which may differ significantly from other countries. As a result, the research may only be partially applicable on a global scale. Nevertheless, it is feasible to initiate similar studies in other countries to compare data. In connection with the previous limitation, this lesson study was implemented in a trilingual context. Participant teachers were Catalan and French native speakers, whereas researchers were Spanish native speakers. Consequently, the research instrument had to be applied in a language other than the mother tongue of the teachers or researchers. Since the questionnaire was designed by the researchers, it was applied in Spanish, but this decision might have caused misunderstandings regarding the intention of some of the questions. Even when most participants, further than Catalan and French, were fluent in Spanish, there could be nuances in the meaning of some of the verbs and adjectives in the questionnaire. The PD program was compulsory for teachers, a condition that might be particularly disadvantageous for teachers (Clivaz & Takahashi, 2018). Still, the results reveal that this PD method led to improved conditions in teachers' perceptions and in the Andorra education system. The last limitation comes from the structure of the instrument, we used closed-ended lists of emotions, because we already had used open-ended questions during the interviews to write the initial report, thus, we already had some previous information. However, this structure could hide other possible emotions. In a forthcoming paper, we are analyzing the answers to open-ended questions in the instrument in which those emotions could arise.

Acknowledgements

This research was funded by the Andorran Ministry of Education. Authors want to express their gratitude. The authors also want to acknowledge the participation and collaboration of the participant teachers and administrative staff of the Ministry.

References

- Alsina, Á., & Mulá, I. (2019). Advancing towards a transformational professional competence model through reflective learning and sustainability: The case of mathematics teacher education. *Sustainability*, *11*(15), 4039. <https://doi.org/10.3390/su11154039>
- Bakkenes, I., Vermunt, J. D., & Wubbels, T. (2010). Teacher learning in the context of educational innovation: Learning activities and learning outcomes of experienced teachers. *Learning and Instruction*, *20*(6), 533–548.

- <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.09.001>
- Capomagi, G., Benvenuti, S., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). *Il lesson study come strategia di ricerca: un esempio presso il Principato di Andorra* [Conference presentation]. La Formazione Docenti di Matematica tra continuità e innovazione: il Lesson Study, Torino (Italy).
- Clivaz, S., & Takahashi, A. (2018). Mathematics lesson study around the world: Conclusions and looking ahead. In M. Quaresma, C. Winslōw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 153–164). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_9
- Coles, A., Rodríguez-Muñiz, L. J., Chee-Mok, I. A., Ruiz, A., Karsenty, R., Martignone, F., Osta, I., Ferretti, F., & An Nguyen, T. T. (2023). Teachers, resources, assessment practices: Role and impact on the curricular implementation process. In Y. Shimizu & R. Vithal (Eds.), *Mathematics Curriculum Reforms Around the World* (pp. 291–321). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_18
- Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 17(3-4), 107–123.
- Cross Francis, D. I., Hong, J., Liu, J., Eker, A., Lloyd, K., Bharaj, P. K., & Jeon, M. (2020). The dominance of blended emotions: A qualitative study of elementary teachers' emotions related to mathematics teaching. *Frontiers in Psychology*, 11, 1865. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01865>
- Fernandez, C. (2002). Learning from Japanese approaches to professional development: The case of lesson study. *Journal of Teacher Education*, 53(5), 393–405. <https://doi.org/10.1177/002248702237394>
- Fernandez, C., & Yoshida, M. (2012). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781410610867>
- Funghi, S. (2022). *Cultural transposition of lesson study: Primary pre-service teachers' beliefs after a workshop* [Conference presentation]. 28th International Conference on Mathematical Views (MAVI28), Gijón (Spain).
- Gaines, R. E., Osman, D. J., Maddocks, D. L. S., Warner, J. R., Freeman, J. L., & Schallert, D. L. (2019). Teachers' emotional experiences in professional development: Where they come from and what they can mean. *Teaching and Teacher Education*, 77(1), 53–65. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2018.09.008>
- Kadron, T., & Inprasitha, M. (2013). Professional development of mathematics teachers with lesson study and open approach: The process for changing teachers values about teaching mathematics. *Psychology*, 4(2), 101–105. <http://dx.doi.org/10.4236/psych.2013.42014>
- Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Korthagen, F. A., & Vasalos, A. (2005). Levels in reflection: Core reflection as a means to enhance professional growth. *Teachers and Teaching*, 11(1), 47–71. <https://doi.org/10.1080/1354060042000337093>
- Kyei-Blankson, L. (2014). Training math and science teacher–researchers in a collaborative research environment: Implications for math and science education.

- International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(5), 1047–1065. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9444-6>
- Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools.
- Mellone, M., Pacelli, T., & Liljedahl, P. (2021). Cultural transposition of a thinking classroom: to conceive possible unthoughts in mathematical problem solving activity. *ZDM Mathematics Education*, 53(4), 785–798. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01256-z>
- Ministry of Education [Andorra]. (2022). Pla Estratègic per a la Renovació i Millora del Sistema Educatiu Andorrà. <https://www.educacio.ad/sistema-educatiu-andorra/permsea>
- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. Hart, A. Alston, & A. Murata (Eds.), *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education* (pp. 1–12). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1
- Ní Shúilleabháin, A. (2017). Enacting curriculum reform through lesson study in the Irish post-primary mathematics classroom. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 65–85). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_4
- Pekrun, R. (2017). Emotion and achievement during adolescence. *Child Development Perspectives*, 11(3), 215–221. <https://doi.org/10.1111/cdep.12237>
- Ponte, J. P. D., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2017). Fitting lesson study to the Portuguese context. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 87–103). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_5
- Posner, J., Russell, J. A., & Peterson, B. S. (2005). The circumplex model of affect: An integrative approach to affective neuroscience, cognitive development, and psychopathology. *Development and Psychopathology*, 17(3), 715–734. <https://doi.org/10.1017/S0954579405050340>
- Ramploud, A., Funghi, S., & Bartolini, M. G. (2022). Chinese lesson study: Critical aspects of transfer from China to Italy. *International Journal for Lesson & Learning Studies*, 11(2), 147–169. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2021-0031>
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Aguilar-González, Álvaro, Alonso-Castaño, M., García-Honrado, I., Lorenzo-Fernández, E., & Muñiz-Rodríguez, L. (2023). Explorando nuevas estrategias de formación del profesorado de matemáticas: un enfoque ampliado del Lesson Study para el desarrollo profesional en la Escuela Andorrana. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 98(37.2), 35–54. <https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99131>
- Saunders, R. (2013). The role of teacher emotions in change: Experiences, patterns and implications for professional development. *Journal of Educational Change*, 14(3), 303–333. <https://doi.org/10.1007/s10833-012-9195-0>
- Scott, C., & Sutton, R. E. (2009). Emotions and change during professional development for teachers: A mixed methods study. *Journal of Mixed Methods Research*, 3(2), 151–171. <https://doi.org/10.1177/1558689808325770>
- Sutton, R., & Wheatley, K. (2003). Teachers' emotions and teaching: A review of the literature and directions for future research. *Educational Psychology Review*, 15(4),

- 327–358. <https://doi.org/10.1023/A:1026131715856>
- Taxer, J. L., & Frenzel, A. C. (2015). Facets of teachers' emotional lives: A quantitative investigation of teachers' genuine, faked, and hidden emotions. *Teaching and Teacher Education*, 42, 78–88. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2015.03.003>
- Vermunt, J. D., Vrieki, M., van Halem, N., Warwick, P., & Mercer, N. (2019). The impact of lesson study professional development on the quality of teacher learning. *Teaching and Teacher Education*, 81, 61–73. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.02.009>
- Winsløw, C., Bahn, J., & Rasmussen, K. (2017). Theorizing lesson study: Two related frameworks and two Danish case-studies. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ni Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 123–142). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_7
- Zeichner, K. (2012). The turn once again toward practice-based teacher education. *Journal of Teacher Education*, 63(5), 376–382. <https://doi.org/10.1177/0022487112445789>

RECENSIONI

Odifreddi, P. (2022). *Pillole matematiche. I numeri tra umanesimo e scienza*. Raffaello Cortina editore.

Recensione di Bruno D'Amore

Tanti anni fa, quando ancora non conoscevo di persona Piergiorgio, lessi un suo breve testo, non ricordo più quale; in esso parlava del *De Rerum Naturae* di Lucrezio. Per me era solo la citazione di un'opera sentita nominare mille volte, ma mai letta/studiata per davvero. Ma quella citazione di PG era così intensa e convincente, che non trovai altra possibilità, e mi costrinsi a leggere quell'opera. Ne fui così soddisfatto, che cominciai io stesso a citarla

e a consigliarla a tutti. Prima e dopo ciò, ho letto credo tutto quel che PG ha pubblicato sotto forma di libro. Mentre confesso di aver letto solo di tanto in tanto le sue puntate su *Le Scienze*, negli ultimi 20 anni circa, trovandole esilaranti, dotte, stimolanti, preziose. Nel frattempo ci siamo conosciuti, siamo diventati amici, l'ho invitato in Colombia per un tour di conferenze su tutti i temi possibili (dalla religione, alla storia, all'arte figurativa, ah sì, anche sulla matematica in genere e logica in particolare). Fino al punto di fare una conferenza a due voci, a Ravarino, in provincia di Modena, nell'aprile 2023. Ho sempre raccomandato a tutte le persone che stimo di leggere i suoi scritti perché sono densi, ricchi, utili, colti, ...

Ma poi, la sorpresa! Avendo saputo che non avevo letto tutti i suoi scritti su *Le Scienze*, per farmi un regalo personale, Piergiorgio ha deciso di ristamparli tutti in un libro, apposta per me; e così è nato questo *Pillole matematiche* dal quale ora non riesco più a separarmi.

È diviso in sezioni.

La prima è *Umanesimo*, a sua volta comprendente varie tematiche ciascuna delle quali ha come titolo un verbo.

In *Divulgare* (che è la sua passione e la sua principale attività) passa da Platone ad Archimede, da Swift a Disney, da Abbott a Gardner e tanti altri autori, in una sorta di carosello preciso e documentato, attraente e significativo, dal racconto al film, al documentario, al blog. E regalando al lettore dati, storie, immagini, racconti suggestivi, divertenti, colti, innumerevoli. E facendo capire bene finalmente a tutti che cosa sia la divulgazione vera, di classe, divulgazione dotta!

Poi *Raccontare*, che comprende una decina di storie narrate con quella verve e quella sapienza che ti lasciano senza fiato, facendo uso di testi scelti fra i più belli e significativi di vari letterati, da Dostoevskij a Verne, da Borges a García Marques a Dan Brown, passando da Mann e Broch, senza dimenticare Tolstoj ed Eco. In ciascun caso la narrazione e le scelte sono di una efficacia esemplare



che ti lascia senza fiato. Perfino quando sai già tutto, il modo di dirtelo è appassionante, diretto, contundente.

Segue il verbo *Rappresentare*, nel cui ambito appaiono Archita, Giotto, Leonardo, Raffaello, Manet e tanti altri, tra i quali, questa volta inaspettato, Kubrick. D'altra parte, molta matematica *si deve* rappresentare, e altra *serve per* rappresentare; a volte ce ne dimentichiamo. Ma gli esempi sono precisi e chiarissimi.

Giocare è il trionfo dei più famosi giochi, narrati e spiegati ed esemplificati con arguzia e sensibilità, Tris, Scarabeo, Origami, i puzzle di Loyd, Sudoku, Dama, Scacchi, Hex, Go, Life, con un omaggio finale a Conway, da tutti noi super amato. Né poteva mancare il riferimento all'*Arte Amatoria* di Ovidio, esempio che anch'io amo fare per attrarre l'attenzione della platea.

Segue il capitolo *Curiosare*, nel quale si presentano vari temi matematici a carattere giocoso o almeno inatteso, come la geometria del taxi, le ruote quadrate, i pendoli di Huygens, la legge di Hack sulla lunghezza dei fiumi, Luis Carroll e una versione moderna di problemi che risalgono ad Alcuino di York, il famoso autore di uno dei più famosi libri sui giochi matematici della storia. (E qui ci sarebbe tutta una storia da raccontare a proposito di un presunto saccheggio da un libro precedente, di Beda il Venerabile, sempre di York; ma sarà per un'altra volta).

Il tema successivo è espresso con il titolo *Vivere e morire*, bellissimo, appassionante, nel corso del quale appaiono nomi come Pascal, Euler, Hilbert, Weil, Villani, Thurston, Kreisel, Nash, Mirzakhani e Atiyah. PG ci obbliga a riflettere su temi profondi, esistenziali, in relazione a esseri umani speciali. La lettura del testo su Nash mi ha ricordato con entusiasmo quando mi invitò a tenere la conferenza finale del suo *III Festival della matematica* a Roma, la sera del 22 marzo 2009, che ahinoi fu anche l'ultima conferenza di quel ciclo leggendario, dato che mai ci fu un IV festival per via della miopia di politici locali. Ebbi in quei giorni l'occasione di conoscere Nash, personaggio davvero leggendario, non certo per via del famoso film su di lui, ma per quanto ha saputo creare in matematica, con moglie e figlio. (L'emozione era anche dovuta al fatto che la mia tesi di laurea in matematica a Bologna e il mio primo libro pubblicato fu proprio sulla teoria dei giochi, ma non lo dissi a Nash). Ricordo che, in quella occasione, PG chiese a Martha e a me di prestare 100 opere di Oscar Reutersvärd da mettere in mostra nel corso del festival, cosa che avvenne, ovviamente; con centinaia di persone in fila per ammirare, una per una, queste opere, discutendone, dita puntate su ciascuna di esse. Come avvenne, in situazione analoga a Bogotá, in una bella sala espositiva della Universidad Nacional, sempre PG presente. Una grande occasione per potenziare la cultura matematica, buttata via, trascurata, addirittura ignorata da chi non ha mezzi per capirla.

Tornando alle pillole, si passa poi alle *Scienze* e fanno così la loro apparizione la geografia, l'astronomia, la fisica, la chimica, la biologia,

l'economia e la politica, sempre con esempi assai più che calzanti, convincenti, unici, profondi, contundenti. Devo ammetterlo, spesso perfino per me stesso inattesi.

Il tutto con un linguaggio che, sebbene sia chiarissimo e leggibile, è però coerente e scientificamente corretto, come solo un vero divulgatore sa fare.

A chi è destinato un libro come questo? A chi lo posso consigliare? Per prima cosa a tutti coloro che amano la matematica, professionisti o no, perché per costoro sarà un piacere leggerlo, una bella avventura intellettuale, anche proprio sul piano della curiosità e (spesso) della sorpresa. Ma anche a coloro che hanno dubbi sulla matematica e vogliono saperne di più, senza doversi sorbire testi tecnici universitari un po' pesantucci (a volte).

Ma io sto pensando, è una mia tendenza naturale, una sorta di vizio intellettuale, a quegli insegnanti nella cui classe ci sono studenti che non sopportano, non capiscono, non accettano la matematica; se a costoro si potessero offrire, di tanto in tanto, storie avvincenti come queste, e non solo la proposta di trovare le radici di un'equazione di secondo grado, beh, credo che sarebbe un vantaggio per tutti: per questi studenti, in primis, per il docente, che d'improvviso diverrebbe un dispensatore di idee geniali e piacevoli e (pur sotto il nome "matematica"). Credo che questo libro potrebbe avere un suo posto nell'aula e un suo ruolo didattico, narrativo, enciclopedico, ... lasciatemelo dire, divertente, aggettivo che per molti studenti e colleghi stona un po', fra quelli che s'usano relazionare con la matematica.

Se c'è ancora qualcuno che crede alla favola delle *due culture*, inventata per sollevare l'animo a chi non sa nemmeno leggerla, la scienza in generale e la matematica in particolare, bene, questo libro è per costui una definitiva sconfitta, senza più appello.

Contucci, P. (2023). *Rivoluzione Intelligenza Artificiale: Sfide, rischi e opportunità*. Dedalo.

Recensione di Bruno D'Amore

Sempre più, a tutti i livelli e in ogni circostanza, si parla della prossima rivoluzione sociale, culturale e tecnologica, quella che senza dubbio è già in corso da decenni e che porterà alla nostra civiltà umana i cambi più significativi e drastici di tutta la sua storia.

Se ne parla su tutti i mezzi di comunicazione, da decenni; ma solo da poco non solo i tecnici e gli



scienziati, ma anche i filosofi, i sociologi, i tecnocrati, i docenti hanno capito che radicale cambio essa apporterà alla nostra società.

Spesso chi parla di questo tema non vi è del tutto ferrato; e così si leggono frasi, denunce, timori che sembrano soprattutto ispirati ai tanti film di fantascienza che già hanno proposto alcuni aspetti di questo tema (alcuni dei quali, formidabili opere narrative spettacolari, ce le ricorda Pierluigi Contucci, l'Autore di questo libro, fin dal suo inizio; per esempio: *2001: Odissea nello spazio*, tratto dal romanzo di Arthur C. Clarke, e *Blade Runner*, tratto dal romanzo di Philip Dick).

Ma trapela e appare sempre più profonda e significativa un'analisi dotta e realistica, proposta dai tecnologi più specifici e dai matematici, dunque assai più attendibile e degna di credibilità.

Mi piace ricordare, in quanto attivo nel campo di ricerca didattica, che già nel 1988, in occasione della III edizione del convegno nazionale “La matematica e la sua didattica” (che si svolge dal 1986 a Castel San Pietro Terme e che quest'anno, novembre 2023, è alla sua XXXVII edizione), il tema scelto fu il seguente: *Matematica e informatica a scuola*. Segno dei tempi! Da poco il pensiero informatico aveva fatto ingresso reale e significativo nelle scuole di ogni livello, si insegnavano i primi rudimenti della programmazione a bambini di 6-8 anni (il “personaggio” di questa avventura didattica era una simpatica tartarughina che obbediva a dei comandi assai semplici su un piano quadrettato, ideata da Seymour Papert al MIT). Ma non era del tutto chiaro allora quale fosse lo scopo reale apprenditivo di tutto ciò: solo un vago modernismo o una rivoluzione didattica? E poi finalmente si stava superando l'idea che a scuola tutto dovesse essere fatto a mano: disegni geometrici, calcoli, ... E facevano timidamente il loro ingresso in aula i PC, i primi software geometrici, ... Ebbene, già in quella occasione si cominciava a parlare di Intelligenza Artificiale, ma lo si faceva in maniera primitiva, ancora poco significativa, sembrava fosse solo l'occasione di mostrare che la scuola era pronta a un vago modernismo. Tanto che la conferenza che io stesso tenni (e il cui testo appare ora sugli Atti di quel convegno) era il seguente: “L'influenza dell'Intelligenza Artificiale in didattica”.

Dunque, con molta curiosità e con infinita tensione emotiva ho preso fra le mani questo recentissimo libro del collega Pierluigi Contucci che so essere scientificamente esperto di questo tema, uno dei suoi maggiori studiosi dal punto di vista matematico, non solo in Italia; e che so essere interpellato dal punto di vista tecnico da chi ha potere politico in Italia, sollecitato a dare pareri e a fornire più che credibili ipotesi di risposta. (Non a caso Pierluigi darà la conferenza inaugurale al prossimo convegno di CSPT). Sapevo che avrei trovato le risposte che tutti noi aspettiamo da decenni alle seguenti domande solo apparentemente ingenua:

- Dobbiamo temere o auspicare questa rivoluzione, peraltro già iniziata, anzi ora piuttosto avanzata, ma che ancora non ha dato tutti i frutti che ci si aspettano?
- Che cosa significa davvero dal punto di vista matematico questa IA e che cosa comporterà dal punto di vista sociale?

Mi aspettavo un libro-bomba, sul piano scientifico e sul piano sociale.

E così è; ma con una graditissima sorpresa che mi ha affascinato, conquistato e che altrettanto farà sui lettori: la sua estrema leggibilità, la sua scrittura piana, piacevole, semplice, alla portata di tutti, come pochi scienziati sanno fare.

Molti dei timori che tutti abbiamo sulle conseguenze del fatto che tutto quel che riguarda molte attività umane è sempre più da eseguire al PC e non più attraverso rapporti umani diretti; che in tante occasioni, oramai quasi tutte, non si interloquisce con persone ma con un robot addestrato; che ogni informazione è elaborata e resa disponibile da una macchina che apprende con rapidità sorprendente e che solo apparentemente non è critica ... Lo è dal punto di vista dell'immensa capacità di elaborazione dati, come se l'intelligenza, la capacità speculativa, l'apprendimento siano connessi e in dipendenza solo rispetto alla quantità di dati disponibili allo stesso tempo e non a una sorta di capacità di elaborazione critica di essi, da parte dell'individuo umano.

Gli esempi fatti dall'Autore a proposito della sconfitta oramai assodata degli scacchisti umani da parte di macchine dotate in memoria di un numero impressionante di strategie possibili, lo provano. La macchina non è "più intelligente", come scrivono sui quotidiani; è capace di confrontare milioni di casi possibili in pochi istanti, cosa che l'essere umano non potrà mai fare. Sta diventando questo la cultura? Avere tanti dati a disposizione? Non occorre "capire" e far proprie le informazioni, vagliarle criticamente? L'importante è disporne?

Apprensioni, timori, a volte terrore sono espressi non solo da persone inesperte, ma anche da geniali scienziati che hanno dei problemi una visione profondissima, unica, come il geniale fisico Stephen Hawking che, come scrive Contucci, teme che questi prodotti della IA «*potrebbero* divenire indipendenti da noi e, attraverso un processo di auto-modifica, acquisizione dati e costruzione a loro volta di altre macchine, potrebbero prendere il sopravvento sugli obsoleti umani, limitati nella loro evoluzione dalla lentezza biologica».

Pierluigi Contucci, però, fa considerazioni profonde di buon senso, di una sottile capacità analitica, che non possiamo che condividere per le intelligenti analogie storiche che propongono.

Le rivoluzioni industriali degli anni 1750-1800 (tessile, metallurgica) e 1870-1900 (elettricità, petrolio, chimica) cambiarono radicalmente la società umana; l'invenzione del telaio meccanico ridusse sul lastrico milioni di famiglie, la capacità di usare motori di grande potenza in luogo della forza umana e animale in mille occasioni, tolse il lavoro a milioni di persone. Ma poi,

e nemmeno tanto lentamente, le persone stesse si sono indirizzate in direzioni lavorative prima impensabili. Hanno lavorato ai telai in modi diversi e con incombenze diverse; hanno guidato, costruito, riparato, migliorato, alimentato quelle macchine a motore. E ciò indubbiamente ha fatto compiere a buona parte della popolazione mondiale un salto qualitativo enorme: ora abbiamo modo e tempo di viaggiare per diletto, di andare in auto a trovare i nostri amici, possiamo studiare, leggere, guardare la TV, tutto inimmaginabile prima.

Per analogia, la rivoluzione iniziata nel 1970-1980 (elettronica-telecomunicazioni-informatica) e prevista in aumento nei prossimi anni, dovuta al massiccio ingresso della IA nelle nostre vite sarà immensa, totale, un cambio sociale e abitudinario senza precedenti. Ma, speriamo, l'essere umano si adatterà alle nuove incombenze, a fattori sociali che per ora sono imprevedibili ma che necessariamente dovranno emergere.

Sono convinto che Contucci abbia ragione, che questa sua ottimistica presa di posizione sarà la vincente.

Ma questo libro offre anche una visione scientifica dell'IA; è vero, l'Autore non entra in dettagli tecnici e culturali scientifici come potrebbe fare e come sarebbe in grado di fare; ma in più occasioni la sua narrazione così trascinante e sottile, da avvincente narratore, dà al lettore idee e temi affascinanti anche sul piano scientifico.

Visto che sempre più si parla di temi di questo genere a scuola e fra docenti, suggerisco con convinzione che questo è un libro che deve essere letto dai docenti di tutti i livelli scolastici; anzi, potrebbe esser letto, capitolo per capitolo, dagli studenti e discusso tra loro e con i docenti; sarebbe una conquista culturale di alto prestigio ma, lo confermo, di alto gradimento intellettuale.

Peres, E. (2022). *Elogio dello zero*. Fefé.

Recensione di Bruno d'Amore

Tutti sanno chi era Ennio Peres, certo il *giocologo* più creativo e critico che l'Italia abbia mai avuto; ha collaborato infatti con le riviste e con gli editori più importanti del settore. La sua fama ha di gran lunga spaziato ben al di là del pubblico degli insegnanti di matematica, dato che si è dedicato a tutti i generi di "giochi". Ma il suo amore per la matematica e soprattutto per quella allegra e stimolante metodologia didattica che si basa sui giochi, come strumento di fantasia, critico ma anche didattico, l'ha visto protagonista indiscusso in questo settore, per decenni.



Ma Ennio era anche molto attratto dalla matematica divulgativa e dalla storia non troppo pedante di essa, quella che prende in considerazione non solo aspetti formali ma anche gli esseri umani che ne sono stati protagonisti, con tutte le loro caratteristiche.

Aveva in elaborazione un libro, quando ci ha lasciato; libro che, con amore e passione, Susanna ha pian piano ricostruito sulla base delle tracce cartacee incompiute ritrovate. E questo libro era/è dedicato a uno dei personaggi tematici più attraenti della matematica, lo *zero*, che è sempre stato un suo cavallo di battaglia.

Fortunatamente c'era già parecchio materiale cosicché Susanna è riuscita a ricostruire proprio quel libro che certo Ennio aveva in mente di scrivere, dedicato a questo oggetto matematico interessante, alla sua storia, alle sue a volte sorprendenti peculiarità, ai paradossi che è in grado di far nascere e soprattutto all'immensa qualità di giochi sottili, ironici, talvolta/spesso sorprendenti che per tutta la vita ha proposto. Alcuni sono sottili e dotti, alcuni piacevoli e inattesi, soprattutto culturalmente divertenti.

E così, oramai parecchi mesi dopo la sua scomparsa, l'editore Fefè di Roma regala a noi appassionati, soprattutto a noi che tanto abbiamo amato e stimato Ennio, questo brevissimo volumetto che, essendo collocato all'interno di una collana che si chiama "Elogi", assume il titolo: *Elogio dello zero*.

Fra le tante preziose note, c'è quella relativa alle controverse questioni della datazione che implica un anno zero, di circa 2023 anni fa; alla data iniziale e finale di un secolo o di un millennio; proposte aritmetiche e algebriche su questo numero così controverso anche filosoficamente e dal punto di vista religioso. Ma, insisto, soprattutto Ennio ci sorprende con i numerosi giochi nei quali lo zero ha un ruolo da protagonista, sia dal punto di vista aritmetico sia algebrico. E così l'Autore suggerisce implicitamente al docente di matematica di qualsiasi livello scolare attività divertenti e spesso ironiche da far svolgere in aula, per catturare l'attenzione e stimolare la creatività, attività che hanno zero come protagonista. E poi storie che hanno a che fare con civiltà talvolta remote, talaltra nemmeno tanto. E poi una raccolta lunghissima di frasi, testi e citazioni che vedono protagonista la parola "zero" o il numero zero, tratte davvero da tutti i campi dello scibile umano.

Il libro consta di sette capitoli, uno dedicato alla storia, due dedicati all'aritmetica, uno alla magia, uno al tempo, un paio a fughe di fantasia, ben al di là della sola matematica.

Amo considerarlo come l'ultimo regalo di Ennio, la testimonianza della sua curiosità, della sua voglia di coinvolgere tutti noi lettori su temi affascinanti, divertenti ma non per questo insignificanti. Lo zero di Ennio, al contrario, significa molto, per lui e per noi che, attraverso queste poche pagine, ancora abbiamo la dimostrazione di come Ennio sapesse scendere in profondità tematiche così diverse, con rispetto e affetto.

Castellini A., Giberti C., Lemmo A., & Maffia A. (2023). *AttivAzione: Laboratorio di matematica per la scuola del primo ciclo*. libreriauniversitaria.it.

Recensione di Bruno D'Amore

Da decenni si studiano le peculiarità didattiche dell'ambiente "laboratorio", visto come spazio specifico per svolgere attività didattiche [che si differenziano da quelle usuali (spesso stereotipate) dell'ambiente "aula"], nel quale lo studente ha un ruolo attivo, concreto, inventivo, non formale. Questa idea, classica nel mondo educativo pedagogico, ha nei decenni spesso cambiato connotazione e modalità, grazie a una vera e propria ricerca che l'ha esaminato, studiato, criticato, rielaborato, ma resta un fattore determinante nella versione costruttiva della conoscenza.

A queste sue peculiarità ben note e per lo più riconosciute dai docenti, si affiancano aspetti di estremo interesse, per esempio quello del coinvolgimento personale concreto, attivo, dell'apprendente che necessariamente assume su di sé la responsabilità del proprio apprendimento.

Questo libro vuole essere un contributo a questa direzione didattica, la proposta di laboratori di matematica per il primo ciclo scolastico.

Ma non si tratta di una proposta solo astratta e teorica, sebbene il primo capitolo, in sole 20 pagine, vuol essere un esame delle peculiarità di tale ambiente didattico e di come esso cambi una prassi consolidata, per esempio le modalità di valutazione. In esso si presentano: il ruolo del docente, il compito del discente, l'evidenziazione dei diversi elementi che compongono l'apprendimento in matematica (concettuale, algoritmico, strategico, comunicativo, semiotico) seguendo gli studi di Martha Isabel Fandiño Pinilla, citata dagli Autori.

Si tratta invece di una sorta di suggerimento concreto, inerente strettamente alle diverse componenti della matematica che fornisce al docente elementi forti, attivi, determinati, che aiutano nella prassi scolare. I restanti quattro capitoli che lo costituiscono, infatti, dal 2 al 5, sono specifici ciascuno di uno dei diversi ambiti delle *Indicazioni nazionali* in relazione al curriculum del 2012.

Nel capitolo 2 si presenta il tema "spazio e figure" con tematiche di grande rilevanza che sappiamo essere decisamente importanti nella prassi didattica quotidiana: come riconoscere le figure e denominarle; che cosa significa definirle; particolari sui quadrilateri, uno dei nomi classici della geometria a scuola; proposte di carattere specifico sul laboratorio di geometria. E poi una significativa analisi di tutto ciò, ma legata alla distinzione fra i 5 tipi di apprendimento nominati sopra.



Il capitolo 3 è analogo nella struttura, dedicato al tema sempre troppo poco dibattuto, illustrato e perseguito: dati e previsioni. Soprattutto ci si rivolge alla capacità di interpretare i grafici e le tabelle, si fanno analisi assai motivate e precise sulla didattica della statistica, spesso quasi ignorata per lo più nelle nostre scuole.

Il capitolo 4 è dedicato alle relazioni e alle funzioni, uno dei temi più significativi della matematica, ma quasi sempre ignorato o sottovalutato nella scuola italiana: come si rappresentano le relazioni, come si passa dal linguaggio naturale a quello matematico, quali sono le specificità didattiche delle relazioni. È in questo capitolo che si ha l'incontro con l'algebra che molti considerano disciplina da scuola secondaria ma che, al contrario, è assai necessariamente presente fin dalla scuola primaria.

Il capitolo 5, infine, è dedicato ai numeri; sappiamo che tale tema è considerato il più classico, atteso, ovvio; gli Autori forniscono esempi e trattano temi di grande rilevanza e grande pregnanza didattica che non possono che giovare alla formazione dei docenti e all'analisi critica della propria prassi.

Una lunga ma precisa bibliografia potrebbe aiutare quei lettori docenti che avvertissero il bisogno o il desiderio di approfondire le proprie competenze.

Si tratta dunque di un lavoro utile, concreto, attivo, intelligente che dovrebbe accompagnare il quotidiano dei docenti di matematica nella loro prassi scolare, ricco com'è di spunti, di suggerimenti, di analisi critiche, soprattutto per quanto concerne i contenuti matematici e la didattica della matematica, intesa come disciplina di ricerca che fornisce agli insegnanti risultati di grande concretezza che possono facilitare il lavoro che non è quello di "insegnare" ma quello di far sì che gli studenti apprendano.

Kovalevskaja, S. (2022). *Memorie d'infanzia*. (Prefazione di Laura Guidotti, postfazione di Umberto Bottazzini). Pendragon.

Recensione di Bruno D'Amore

Racconta Harold Davempont, in una breve e inconsueta biografia di Mozart, diversa dalle solite, che quando questi aveva setto-otto anni qualcuno gli insegnò l'aritmetica, la scienza dei numeri; e che questa cosa nuova, questo giocattolo mentale, tanto piacque al geniale bambino che di null'altro volle occuparsi per un certo periodo, se non scrivere numeri ed eseguire calcoli su qualsiasi superficie adatta, dai muri della casa paterna agli spartiti (fin sotto le sedie, dice Davempont).



Non è raro questo eccitamento quasi morboso per la matematica nelle persone di grande intensità emotiva, tanto che la ritroviamo in Dante, in Piero della Francesca, in Dürer, ... Ma non si deduca frettolosamente da ciò che occorre essere geni, anche se in un campo qualsiasi, per apprezzare la matematica.

In una delle mie tante scorribande in scuole primarie, curioso d'esser testimone di apprendimenti spontanei, posso testimoniare di molti bambini, normali e attualmente senza nomi illustri, conquistati, affascinati, dalla sottile bellezza della matematica. Ricordo Andrea che scoprì da solo che un quadrato ha gli assi di simmetria che gli derivano dall'essere un particolare rettangolo e però anche quelli che gli derivano dall'essere un particolare rombo, compiendo un prodigio di ragionamento e dichiarando poi esplicitamente un'estasi che ancora oggi mi commuove. Ricordo Cristian, che scoprì da solo che zero elevato a zero è qualcosa che esprime una contraddizione in sé. E potrei continuare a lungo, molto a lungo.

C'è, intrinseco nella matematica, qualche cosa che conquista, che affascina, che ammalia... Se lo si sa scoprire...

Certo è più facile illudersi di scoprire magie in opere d'arte: visitando il museo di Giorgio Morandi a Bologna ci si illude di vedere ... bottiglie e se ne può restare colpiti; ma entrare davvero in sintonia con la sottile poetica dell'artista di Grizzana richiede una cultura e una sensibilità profonde che i più non hanno. Si può restare affascinati dall'ascolto di una musica che ti toglie il fiato, per esempio Andrés Segovia che suona Bach, come sto sentendo in questo momento; ma il senso profondo di queste esaltazioni sublimi sfugge ai più ...

Ma, mentre l'arte dà l'illusione di un possibile, facile accesso anche senza impegno, la scienza, per essere goduta, chiede subito il sacrificio dello studio, della dedizione.

E così l'arte gode dei privilegi della massa, delle attenzioni di stampa e media, mentre la scienza fa capolino solo di quando in quando, storpiata il più delle volte.

Ecco quindi che l'uscita di un libro che coniuga la matematica della vita quotidiana va salutata con infinita gioia; un libro scritto da un matematico di alta classe, di prestigio indubbio, ma sotto forma narrata, autobiografico, nel quale il personaggio rivela di sé le più umane passioni. E ancor più va segnalata la cosa se questo personaggio è un matematico donna, Sof'ja Vasil'evna Kovalevskaja, una eroina russa dell'emancipazione femminile, sulla cui vita si sono scritte tante biografie, spesso storpiate, perché così vari miti si sfatano in un colpo solo: che le donne siano escluse dalla ricerca seria, che i matematici siano personaggi schivi e lontani dalla vita reale.

La narrazione autobiografica scorre rapida e snella, come nella migliore tradizione russa, a un livello artistico tale che potrebbe essere opera di un vero scrittore professionista; ma per colpire la fantasia del lettore, questi mai deve dimenticare, neppure per un attimo, chi ne è l'autore, chi è la bambina protagonista del libro.

Eccellenti, appassionate e vibranti sono l'introduzione di Laura e la postfazione di Umberto, dotte e problematiche, come introduzioni e postfazioni devono essere, ma allo stesso tempo distaccate e scientifiche, senza cadere nella facile rete del compiacimento retorico.

Bello, profondo, commovente, il brevissimo profilo autobiografico nel quale Sof'ja racconta la nascita della sua passione per la matematica.

Tutte queste componenti fanno di questo libro un piccolo capolavoro, un gioiello destinato a regalare momenti di profonda intima soddisfazione a chiunque vorrà leggerlo, insegnanti di qualsiasi disciplina, studenti o semplicemente lettori curiosi.

Editoriale

Cristina Coppola

pp. 7–8

Digital interactive storytelling in matematica: narrazione digitale come *affective pathway*

Digital interactive storytelling in mathematics: digital storytelling as an *affective pathway*

Digital interactive storytelling en matemática: narración digital como *affective pathway*

Anna Pierri

pp. 9–23

Tra passato e futuro: storie di futuri insegnanti di matematica di scuola primaria

Between past and future: stories of pre-service mathematics primary teachers

Entre pasado y futuro: historias de futuros profesores de escuela primaria

Annalisa Cusi e Francesca Morselli

pp. 25–39

Apprendere la matematica durante la pandemia: effetti su emozioni e autoefficacia di studenti universitari

Learning mathematics during the pandemic: effects on university students' emotions and sense of self-efficacy

Aprender matemática durante la pandemia: efectos sobre las emociones y la autoeficacia de los estudiantes universitarios

Chiara Andrà, Andrea Amico e Matteo Pezzutto

pp. 41–56

Teachers' emotions during a professional development program based on lesson study Learning mathematics during the pandemic: effects on university students' emotions and sense of self-efficacy

Le emozioni degli insegnanti durante un programma di formazione professionale basato sullo lesson study

Emociones del profesorado durante un programa de desarrollo profesional basado en el estudio de clase (lesson study)

Laura Muñiz-Rodríguez and Luis J. Rodríguez-Muñiz

pp. 57–76

RECENSIONI

pp. 77–89
